TTDI Nº 01/83:

A DISTRIBUIÇÃO LOGARITMO-NORMAL E A SUA APLICAÇÃO NA ESTATÍSTICA DOS PARTICULADOS FINAMENTE DIVIDIDOS

GTAR/STA/DENG

O PRESENTE TEXTO ABRE A SÉRIE DE "TRABALHOS TEÓRICOS DE DESENVOLVIMENTO INTERNO - TTDI" GERADOS PELA GERÊNCIA DE TECNOLOGIA DO AR COM A FINALIDADE DUPLA DE APROFUNDAR OU RESUMIR ASSUNTOS TÉCNICOS DE INTERESSE DA UNIDADE EM SEU CAMPO DE ATUAÇÃO E DE SE CONSTITUIR, PARALELAMENTE, EM UMA BIBLIOGRAFIA AUXILIAR DE CONSULTA AO CORPO TÉCNICO DA CETESB.

NOVEMBRO/83

GTAR/STA/DENG

Í N D I C E

A DISTRIBUIÇÃO LOGARITMO-NORMAL E A SUA APLICAÇÃO NA ESTATÍSTICA DOS PARTICULADOS FINAMENTE DIVIDIDOS

INTRODUÇÃO:

Em que pese o estigma de sua denominação derivativa, a distribuição logaritmo-Normal é tão fundamental na estatística como a sua própria distribuição mãe. Tal como para esta, embora mais recentemente (1879), originou-se na teoria de combinação de erros elementares. O fato de que a operação de adição é para o homem menos complexa e mais intuitiva do que a de multiplicação deve se constituir na razão da ordem cronológica de advento de uma e outra - distribuição pois se assim não fosse seria perfeitamente lícito esperar -se que a distribuição Log-Normal fosse a de origem. Ainda como para a distribuição normal, a distribuição Log-Normal encontra na natureza inúmeros exemplos, principalmente nos processos de mudança e de crescimento.

As distribuições mais frequentemente utilizadas na estatística das particulas finamente divididas são: Normal, Logaritmo Normal, Rosin-Rammler e Nukiyama-Tanasawa. Em geral, a distribuição de particulados originados por condensação, reações químicas e precipitação (chuva) é satisfatoriamente representada pela normal. As demais distribuições são empregadas quando as partículas são geradas por processos de desagregação mecânica do meio original.

As distribuições de particulados finamente divididos, provenientes de processos naturais atuantes sobre o solo e as rochas ou como resultado de operações mecânicas tais como a moagem, trituração e classificação, são geralmente marcadamente assimétricas apresentando como relação entre o maior e menor tamanho uma magnitude da ordem de centenas. Além disso, a escolha de uma descrição matemático-estatística fica bastante restrita pois os investi gadores estão interessados em parâmetros tais como o diâmetro, o peso, a área superficial externa e o volume, os quais estão ordenados em potências ascendentes de uma mesma variável, e ainda por razões físicas ou por disponibilidade de um certo método analítico, é conveniente tomar medições em termos de uma característica e expressar os resultados em termos de outra.

Em 1929, Theodore Hatch e Sarah Choate mostraram explicitamente a vantagem da utilização da distribuição Log-Normal na descrição estatística do tamanho de particulados finamente divididos, resultantes da desintegração mecânica de rocha. Em 1933 o mesmo Hatch estabeleceu a relação entre as curvas de frequência de tamanho em número (contagem) e peso. Tal experimento se constituiu na primeira referência literária de uma importante propriedade da distribuição Log-Normal (distribuição de momentos).

Modernamente, inúmeros modelos matemáticos relacionados ao estudo das concentrações de poluentes atmosféricos estão calcados no uso da distribuição Log-Normal. Assim sendo o estudo da mesma torna-se um importante marco na Engenharia Ambiental.

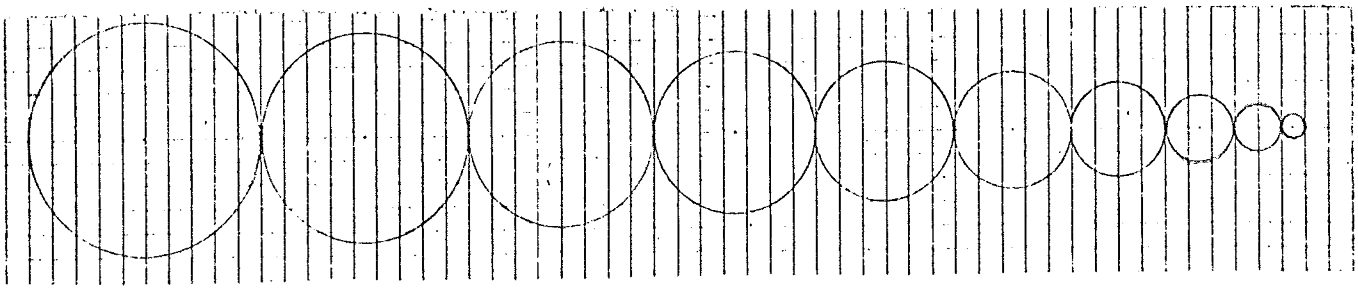
O presente resumo não traz qualquer inovação sobre o tema, mas apresenta detalhadamente todos os tópicos necessários ao perfeito entendimento do assunto hoje em dia apresentado em livros texto de forma muito resumida, incapaz de fornecer ao interessado uma visão satisfatória do ponto de vista - matemático-estatístico.

PRINCIPAIS ATRIBUTOS DE DIÂMETRO DE PARTICULADOS

Nas atividades de avaliação em Higiene Industrial e Controle de Poluição Atmosférica, a caracterização de aerossois quanto ao diâmetro dos particulados é sempre função das necessidades específicas, oriundas da situação que se quer diagnosticar. Entretanto, não são raras as ocasiões onde o método de avaliação disponível limita a caracterização a um determinado atributo de diâmetro. Nestes casos, dependendo da qualificação da amostra obtida - quanto a sua aderência a uma distribuição estatística, poderá ou não haver possibilidade de conversão para o atributo de diâmetro desejado, sem perdas de exatidão matemática e significado físico.

O presente trabalho é relativo ao estudo da distribuição log-normal, entretanto para melhor exemplificar o que são os atributos de diâmetro, podemos verificar o exemplo que se segue :

Seja a distribuição de partículas obtida :



d(μm)	frequência absoluta (n)	$(d)^2\ (\mu m^2)$	$(d)^3\ (\mu m^3)$	$(d)^4\ (\mu m^4)$
1	1	1	1	1
2	1	4	8	16
3	1	9	27	81
4	1	16	64	256
5	1	25	125	625
6	1	36	216	1296
7	1	49	343	2401
8	1	64	512	4096
9	1	81	729	6561
10	1	100	1000	10000
$\Sigma d = 55 \mu m$	$N = \Sigma n = 10$	$\Sigma(d)^2 = 385$	$\Sigma(d)^3 = 3025$	$\Sigma(d)^4 = 25333$

Diâmetro em Número :

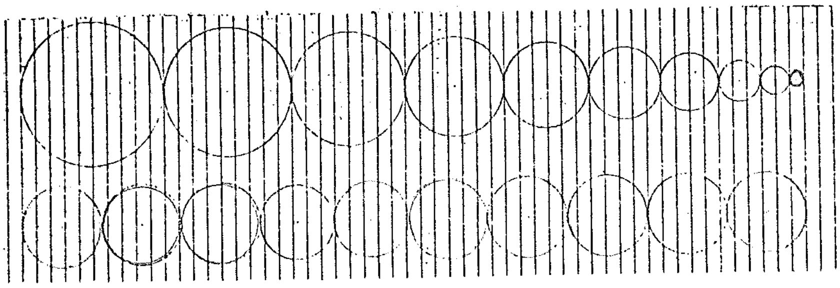
$$MA_N = \overline{d} = \frac{\Sigma d}{N} = \frac{55}{10} = 5{,}5\ \mu m$$

$$MA_{SA} = (\overline{d^2})^{1/2} = \left(\frac{\Sigma d^2}{N}\right)^{1/2} = \left(\frac{385}{10}\right)^{1/2} = 6{,}20\ \mu m$$

$$MA_{VA} = (\overline{d^3})^{1/3} = \left(\frac{\Sigma d^3}{N}\right)^{1/3} = \left(\frac{3025}{10}\right)^{1/3} = 6{,}71\ \mu m$$

Isto é :

- 10 Partículas de 5,5 µm alinhadas terão o mesmo comprimento total que a distribuição original.



- 10 Partículas de 6,20 µm cada igualará o mesma superfície total da distribuição original.

- 10 Partículas de 6,71 µm cada igualará o mesmo volume total da distribuição original.

Diâmetros em Extensão :

$$MA_{LS} = \frac{\Sigma d^2}{\Sigma d} = \frac{385}{55} = 7{,}00 \ \mu m$$

$$MA_{LV} = \left(\frac{\Sigma d^3}{\Sigma d}\right)^{1/2} = \left(\frac{3025}{55}\right)^{1/2} = 7{,}416 \ \mu m$$

- O diâmetro médio superficial em comprimento (MA_{LS}) representa uma distribuição onde o número de partículas, e o volume total passam a ser resultantes, ou seja :

$$N_{LS} = \frac{L}{\overline{d_{LS}}} = \frac{S}{(\overline{d_{LS}})^2} = \frac{55}{7} \ . = \frac{385}{(7)^2} = 7{,}86 \text{ partículas}$$

$$V_{LS} = (\overline{d_{LS}})^3 \ . \ (N_{LS})$$

$$(\overline{d_{LS}})^3 = \overline{d_{LS}} \ . \ \frac{\Sigma d^2}{N_{LS}} = (7) . \frac{(385)}{7.86} = 342{,}88 \simeq 343 \ \mu m^3$$

$$\therefore V_{LS} = (343) \ . \ (7{,}86) = 2695{,}98 = 2696 \ \mu m^3$$

o comprimento total e a área superficial da distribuição original ficam mantidas.

- O diâmetro médio volumétrico em comprimento (MA_{LV}) representa uma distribuição onde o número de partículas e a área superficial total passam a ser resultantes :

$$N_{LV} = \frac{V}{(\overline{d_{LV}})^3} = \frac{3025}{(7,416)^3} = \frac{3025}{407,86} = 7,417 \text{ partículas}$$

$$S_{LV} = (\overline{d_{LV}})^2 \cdot (N_{LV})$$

$$\therefore (\overline{d_{LV}})^2 = \frac{\Sigma d^3}{\Sigma d} = \frac{3025}{55} = 55\ \mu m^2$$

$$\therefore S_{LV} = (55)\ .\ 7,417 = 407,92\ \mu m^2$$

- o comprimento total e o volume total da distribuição original ficam mantidas.

RESUMINDO :

7,86 partículas de diâmetro (MA_{LS}= 7 µm) reproduzem o mesmo comprimento e a mesma área superficial total da distribuição original.

7,417 partículas de diâmetro (MA_{LV}= 7,416 µm) reproduzem o mesmo comprimento e o mesmo volume total da distribuição original.

Diâmetros em volume/área :

$$MA_{SV} = \frac{\Sigma d^3}{\Sigma d^2} = \frac{3025}{385} = 7,86\ \mu m$$

Diâmetros em volume ou massa :

$$MA' = \frac{\Sigma d^4}{\Sigma d^3} = \frac{25333}{3025} = 8,37\ \mu m$$

Dependendo da propriedade que se quer verificar outras potências de diâmetro podem ser envolvidas.

DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS: CONCEITOS BÁSICOS

ACONTECIMENTO ALEATÓRIO:

Um acontecimento diz-se aleatório quando se caracteriza por admitir múltiplos resultados possíveis e não se dispor de elementos de razão suficientes para afirmar qual dêsses resultados se produzirá em determinado instante. Na maioria das circunstâncias é possível metrizar um acontecimento.

PROBABILIDADE: (PARA DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS)

É o limite para o qual tende a frequência acumulada relativa quando a amostra tem um número de elementos tendendo para o do universo. Esta frequência acumulada relativa se aproximará da probabilidade da variável aleatória ser menor ou igual ao valor considerado na população.

VARIÁVEL ALEATÓRIA:

É uma função definida sobre um espaço amostral. No caso de ser contínua, pode assumir diferentes valores em um ou mais intervalos do mesmo.

FUNÇÃO CUMULATIVA OU FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO:

Sendo a variável aleatória uma função definida sobre um espaço amostral, pode-se associar probabilidades aos seus diferentes valores. Isto é realizado pela função de distribuição $F(x_i)$

Assim a função de distribuição de uma variável aleatória contínua (x) no ponto (x_i) é igual à probabilidade de (x) ser igual ou menor que (x_i).

$$F(x_i) = P(x \leqslant x_i)$$

Consequentemente, a probabilidade de que x possua um valor entre x_1 e x_2 será expressa pela diferença entre os valores obtidos pela função distribuição nesses pontos, isto é :

$$P(x_1 < x \leqslant x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

de forma análoga : $P(x > x_i) = 1 - F(x_i)$

Se $F(x_i)$ for a função de distribuição da variável aleatória contínua x definida no intervalo $x \in (a,b)$, então:

- $\lim\limits_{x_i \to a} F(x_i) = F(a) = 0$

- $\lim_{x_i \to b} F(x_i) = F(b) = 1$
- $F(x_i) \geq 0$ para x_i sobre o domínio de x
- $F(x_i) \geqslant F(x_j)$. Se $x_i > x_j$

FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE

Tendo em vista a infinidade de pontos do espaço amostral de uma variável aleatória contínua, a probabilidade associada a qualquer valor da variável será zero. Como já visto, o conceito de probabilidade nas distribuições contínuas está associado à frequência acumulada. Consideremos a probabilidade de uma variável contínua x estar compreendida em um intervalo (a,b):

$$P(a < x \leqslant b)$$

Esta probabilidade dependerá da :

. extensão do intervalo considerado : (b - a)

. concentração de probabilidade no mesmo intervalo : $\dfrac{P(a < x \leqslant b)}{(b - a)}$

Sendo $P(a < x \leqslant b) = F(b) - F(a)$, a concentração de probabilidade dentro do intervalo fica expressa por :

$$\frac{F(a) - F(a)}{(b - a)}$$

Se a extensão do intervalo puder ser elementar;

$(b - a) = \Delta x$, podemos representar: $P(a < x \leqslant b) = P(x_i < x \leqslant x_i + \Delta x)$

Se o incremento tender a zero, pela própria definição de derivada teremos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_i + \Delta x) - F(x_i)}{\Delta x} = F'(x_i) = \frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$$

Em que pese f(x) não ser uma probabilidade, o produto $f(x).\Delta x$ aproximadamente iguala $P(x_i < x \leqslant x_i + \Delta x)$, desde que o valor do incremento seja diminuto, provindo daí a expressão "função de densidade de probabilidade".

Face ao verificado : $d[F(x)] = f(x) \; . \; d(x)$

Integrando, obtemos : $F(x) = \int_a^b f(x) \; . \; dx$

O gráfico de F(x) é uma curva sigmóide que representa a área compreendida entre as ordenadas levantadas a partir de a e b, o eixo real e a função densidade de probabilidade f(x).

ESPERANÇA MATEMÁTICA:

Se $x \in (a,b)$ for uma variável aleatória contínua de função densidade de probabilidade $f(x)$, a esperança matemática ou expectância de x ou ainda a média aritmética é definida por:

$$E(x) = \int_a^b x.f(x).dx$$

Verificam-se as seguintes propriedades:

- $E[E(x)] = E(x)$
- $E(k.x) = k.E(x)$
- $E(\Sigma x_i) = \Sigma E(x_i)$
- $E\left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right] = \prod_{i=1}^{n} E(x_i)$
- Valor mínimo $x \leqslant E(x) \leqslant$ valor máximo de x
- $E(x+y) = E(x) + E(y)$
- $E(x.y) = E(x) . E(y)$, para x e y independentes.

Se figurarmos a função de densidade de probabilidade como um procedimento de ponderação relativa aos valores da variável aleatória em seu domínio, a esperança matemática E(x) pode ser físicamente interpretada como o centróide da distribuição (centro de massa e também centro de gravidade se o sistema estiver em um campo gravitacional constante) pois será um ponto em torno do qual a somatória das distâncias pela ponderação à esquerda igualará o valor obtido à direita pelo uso do mesmo procedimento.

MOMENTOS DE UMA DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA:

Se x for uma variável aleatória contínua definida no intervalo (a,b); com função densidade de probabilidade f(x), por analogia física ao conceito de momento da mecânica racional pode-se definir o momento de ordem r em relação à origem como :

$$m'_r = \int_a^b x^r.f(x).dx = E(x^r)$$

Para o momento de ordem r centrado em relação à média aritmética a expressão fica definida por :

$$m_r = \int_a^b [x - E(x)]^r . f(x).dx = E\{[x - E(x)]^r\}$$

Se x_j com $j = 1,2, \ldots\ldots,k$ são os valores assumidos pela variável aleatória x com as frequências $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_k$; podemos também expressar :

$$m'_r = \frac{\sum_{j=1}^{k} f_j \, (x_j - A)^r}{N} = \frac{\sum_{j=1}^{k} f_j \, . \, d^r}{N} \; ; \text{ sendo } \quad N = \sum_{j=1}^{k} f_j = \Sigma f$$

$$m'_r = \frac{\Sigma f . d^r}{N} = \overline{d^r} = \overline{(x - A)^r}$$; sendo d o desvio em relação a um ponto A

MOMENTO DE PRIMEIRA ORDEM:

$$m'_1 = E\,(x) = \mu$$

$$m_1 = E\{[x - E(x)]\} = E\,\{[x - m'_1]\} = E(x) - E(m'_1) = \mu - \mu = 0$$

MOMENTO DE SEGUNDA ORDEM :

$$m'_2 = E(x^2)$$

$$m_2 = E\,\{[x - E(x)]^2\} = E\,\{x^2 - 2x \, . \, E(x) + [E(x)]^2\}$$

$$m_2 = E(x^2) - 2\,E(x) \, . \, E(x) + E(x)\,E(x) = E(x^2) - E(x)\,E(x)$$

$$m_2 = m'_2 - m'^2_1 \quad \text{(expressa a variância : } \frac{\sum_{j=1}^{k} f_j \, . \, (x_j - A)^2}{N} \text{).}$$

MOMENTO DE TERCEIRA ORDEM:

$$m'_3 = E\,(x^3)$$

$$m_3 = E\,\{[x - E(x)]^3\} = E\,\{x^3 - 3x^2\,E(x) + 3x\,[E(x)]^2 - [E(x)]^3\}$$

$$\therefore\; m_3 = E(x^3) - 3\,E(x^2)\,E(x) + 3\,E(x) \, . [\,E(x)]^2 - [E(x)]^3$$

$$m_3 = m'_3 - 3\,m'_2\,m'_1 + 2\,m'^3_1$$

MOMENTO DE QUARTA ORDEM:

$$m'_4 = E(x^4)$$

$$m_4 = E\,\{[x - E(x)]^4\} = E\{x^4 - 4x^3E(x) + 6x^2[E(x)]^2 - 4x[E(x)]^3 + [E(x)]^4\}$$

$$m_4 = E(x^4) - 4E(x^3) \, . \, E(x) + 6E(x^2)[E(x)]^2 - 4E(x)[E(x)]^3 + [E(x)]^4$$

$$m_4 = E(x^4) - 4\,E(x^3) \, . \, E(x) + 6\,E(x^2)[E(x)]^2 - 3[E(x)]^4$$

$$\therefore\; m_4 = m'_4 - 4\,m'_3\,m'_1 + 6\,m'_2\,m'^2_1 - 3\,m'^4_1$$

A DISTRIBUIÇÃO LOGARITMO-NORMAL UNIMODAL DE DOIS PARÂMETROS

A distribuição Log-Normal em sua forma mais simples pode ser definida como a' distribuição cujos logaritmos das observações se distribuem normalmente.

Seja a variável aleatória contínua X definida no campo positivo, tal que Y = lnX seja normalmente distribuída com média aritmética (μ) e variância (σ^2). Pode-se então dizer que X está distribuída de forma logaritmo-Normal.

$$Y : N\ (\mu\ ;\ \sigma^2) \quad \text{- NORMAL}$$

$$X : \Lambda\ (\mu\ ;\ \sigma^2) \quad \text{- LOGARITMO-NORMAL}$$

ou seja; com as seguintes funções de distribuição:

$$\Lambda\ (x|\mu\ ,\ \sigma^2) = P\{X \leqslant x\}$$

$$N\ (y|\mu\ ,\ \sigma^2) = P\{Y \leqslant y\}$$

Portanto, por definição

$$\Lambda\ (x) = N\ (\ln x) \quad ; \quad (x \geqslant 0)$$

$$\Lambda\ (x) = 0 \quad ; \quad (x \leqslant 0)$$

FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE LOGARITMO-NORMAL

É já sabido que $Y : N\ (\mu,\ \sigma^2)$ possui como função densidade de probabilidade a seguinte expressão :

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma} \cdot \exp\ \left[- \frac{1}{2\ \sigma^2}\ (y - \mu)^2\right] \quad ; \quad - \infty < y < \infty$$

Para obter-se a função de densidade de probabilidade $X : \Lambda\ (\mu\ ,\ \sigma^2)$ dever-se- a aplicar o Método de Transformação De Variável para funções de uma única variá vel aleatória contínua como abaixo descrito :

"Se y for uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabili dade f(y) definida sobre um certo espaço amostral e se x = h(y) for uma função estritamente crescente ou decrescente de y sobre um espaço amostral definido, a função de densidade de probabilidade de x ficará expressa por :

$$f(x) = f\ [y\ (x)] \cdot \left|\frac{dy}{dx}\right|$$

onde o espaço amostral de x fica determinado a partir do espaço amostral de y pela função x = h(y), sendo :

$y(x)$ - função inversa de $h(y)$

$\left|\frac{dy}{dx}\right|$ - valor em módulo de $\frac{dy}{dx}$.

onde $f[y(x)]$ significa que $y(x)$ fica substituido por y em $f(y)$."

No presente caso : $x = h(y) = e^y$; $x \geqslant 0$

$$\therefore \quad \left| \begin{array}{l} y(x) = \ln x \\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

Assim sendo :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma} . \exp\left[- \frac{1}{2\sigma^2} . (\ln x - \mu)^2\right] . \left|\frac{1}{x}\right|$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma.x} . \exp\left[- \frac{1}{2\sigma^2} .(\ln x - \mu)^2\right]$$

Da distribuição normal para dados agrupados é sabido que :

$$\mu = \frac{\sum_1^n f_i \, y_i}{\sum_1^n f_i} = \frac{\sum_1^n f_i \, . \, y_i}{N}$$

mas sendo

$$y_i = \ln x_i ,$$

a medida de tendência central na distribuição logaritmico normal, correspondente à média aritmética de distribuição normal é expressa por :

$$\frac{\sum_1^n f_i \, . \, (\ln x_i)}{\sum_1^n f_i} \quad ; \quad \sum_1^n f_i = N$$

Entretanto a expressão acima nada mais é do que o próprio logaritmo da Média - Geométrica (MG), pois :

$$MG = \sqrt[N]{x_1^{f_1} \, . \, x_2^{f_2} \, . \, x_3^{f_3} . \, \ldots\ldots \, x_k^{f_k}}$$

$$\ln MG = \frac{1}{N} \ln(x_1^{f_1} \, . \, x_2^{f_2} \, . \, \ldots . \, x_k^{f_k}) = \frac{1}{N} (f_1 \ln x_1 + f_2 \ln x_2 + \ldots + f_k \ln x_k)$$

$$\ln MG = \frac{\sum_1^n f_i(\ln x_i)}{\sum f_i} = \frac{\sum_1^n f_i \cdot y_i}{\sum_1^n f_i} = \mu$$

$$MG = e^{\mu} = \exp \cdot \left[\frac{\sum_1^n f_i(\ln x_i)}{\sum_1^n f_i} \right]$$

Sabemos que na distribuição normal, os valores da média, moda e mediana estão superpostos. Na distribuição Log-Normal, devido à sua acentuada assimetria, - tal não acontece. Percebe-se pelo acima exposto que sendo a medida de tendência central da distribuição Log-Normal expressa pela Média Geométrica (menor ou igual que a Média Aritmética para curvas assimétricas de frequências desviadas para a direita), a Média Aritmética fica automaticamente descartada. A moda, devido ao seu significado, fica também descartada. Podemos então, por exclusão, concluir que o valor de tendência central expresso pela Média Geométrica na distribuição Log-Normal é a Mediana.

O raciocínio indutivo acima aplicado fica analiticamente comprovado tanto pelo cálculo do primeiro momento em relação à origem (média) como pela derivação da função de densidade de probabilidade Log-Normal em busca do máximo (moda).

MOMENTOS DA DISTRIBUIÇÃO LOG-NORMAL EM RELAÇÃO À ORIGEM

Para qualquer distribuição $\Lambda\,(x \mid \mu, \sigma^2)$, o momento de ordem r em relação à origem fica definido por :

$$m'_r = \int_a^b x^r\, f(x)\,.\,dx$$

Onde a e b são valores pertencentes ao domínio da variável aleatória contínua; $x \in (o;\ +\infty)$.

Assim sendo, para a distribuição LOG-NORMAL ter-se-á :

$$m'_r = \int_0^{\infty} x^r\,.\,f(x)\,.\,dx$$

Para evitar maiores complexidades no desenvolvimento da integral acima deve-se operar a mesma com a utilização de sua transformada $x = e^y$ e consequentemente com o uso da função densidade de probabilidade para a distribuição normal, isto é f(y). Assim substituída a variável por sua transformada teremos :

$$m'r = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ry} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} \right] dy$$

Aplicando uma nova substituição de variável: $u = \frac{y - \mu}{\sigma}$,

Teremos :

$$y = \sigma u + \mu$$

$$\therefore \quad dy = \sigma du$$

Logo :

$$m'r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{r(\sigma u + \mu)} \cdot e^{-\frac{1}{2} u^2} \cdot du$$

$$m'r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{r\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{r(\sigma u)} \, e^{-\frac{1}{2} u^2} \cdot du$$

$$m'r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{r\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2 - 2r\sigma u)} \cdot du$$

$$m'r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{r\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[(u - r\sigma)^2 - \sigma^2 r^2\right]} \cdot du$$

$$m'r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{r\mu} \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2 r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u - r\sigma)^2} \cdot du$$

Aplicando nova mudança de variável :

$$v = u - \sigma r$$
$$dv = du$$

$$m'r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{r\mu} \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2 r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} \cdot dv$$

Sendo conhecido que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v2}{2}} \cdot dv = 1$, é o valor máximo que pode assumir a função distribuição da distribuição normal.

Idêntico na distribuição Log-Normal à $\int_0^\infty f(x)dx = 1 = N_\infty$
Que representa o momento de ordem zero. Assim no sentido físico :

$$m'_r = e^{r\mu} \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2 \cdot r^2} \cdot m'_o$$

$$\frac{m'_r}{m'_o} = e^{r\mu} \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2 r^2}$$

Do ponto de vista matemático (numérico)

$$m'_r = e^{r\mu + \frac{1}{2} r^2 \sigma^2}$$

Como na $X : \Lambda\ (\mu\ ; \sigma^2)$; $x > 0$ é uma condição de existência, podemos usar a expressão geral do momento em relação à origem para a verificação da média - aritmética da distribuição (primeiro momento)

$$m'_1 = \alpha = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \qquad \text{(MÉDIA ARITMÉTICA)}$$

Sendo o segundo momento a expressão de uma medida de dispersão em relação à média aritmética torna-se necessário converter a expressão do momento centrado na origem para o momento centrado na média :

$$\beta^2 = m_2 = m'_2 - (m'_1)^2$$

$$\therefore\ \beta^2 = m_2 \quad e^{2\mu + 2\sigma^2} - (e^{[\mu + \frac{1}{2}\sigma^2]})^2 = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \frac{2}{2}\sigma^2}$$

$$\beta^2 = m_2 = e^{2\mu} \cdot e^{2\sigma^2} - (e^{2\mu + \sigma^2})$$

$$\beta^2 = m_2 = e^{2\mu} \cdot e^{\sigma^2} \cdot e^{\sigma^2} - (e^{2\mu} \cdot e^{\sigma^2})$$

$$\beta^2 = m_2 = e^{2\mu} \cdot e^{\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \qquad \text{(VARIÂNCIA)}$$

Por definição a variância é igual ao produto do quadrado da média aritmética pelo quadrado do coeficiente de variação; isto é $\beta^2 = \alpha^2 \eta^2$

De fato, $\alpha^2 = [e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}]^2 = e^{2\mu + \sigma^2}$; portanto a quantidade $\eta^2 = (e^{\sigma^2} - 1)$ expressa o quadrado do coeficiente de variação.

Os demais momentos, relativos ao cálculo dos coeficientes de assimetria e curtose, respectivamente o terceiro e quarto momentos, são também definidos em relação à média aritmética.

$$m_3 = m_3' - 3\, m_1' \, m_2' + 2(m_1')^3$$

$$m_3 = e^{3\mu + \frac{9}{2}\sigma^2} - 3\left[(e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}) \cdot (e^{2\mu + 2\sigma^2})\right] + 2\,(e^{3\mu + \frac{3}{2}\sigma^2})$$

$$m_3 = e^{3\mu + \frac{9}{2}\sigma^2} - 3\,(e^{\mu} \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2} \cdot e^{2\mu} \cdot e^{2\sigma^2}) + 2\, e^{3\mu} \cdot e^{\frac{3}{2}\sigma^2}$$

$$m_3 = e^{3\mu} \cdot e^{\frac{9}{2}\sigma^2} - 3\, e^{3\mu} \cdot e^{\frac{5}{2}\sigma^2} + 2\, e^{3\mu} \cdot e^{\frac{3}{2}\sigma^2}$$

$$m_3 = e^{3\mu}\,(e^{\frac{9}{2}\sigma^2} - 3\, e^{\frac{5}{2}\sigma^2} + 2\, e^{\frac{3}{2}\sigma^2})$$

ou :

$$\alpha^3 = e^{3\mu + \frac{3}{2}\sigma^2}$$

$$\eta^6 = (\eta^2)^3 = (e^{\sigma^2} - 1)^3 = e^{3\sigma^2} - 3e^{2\sigma^2} + 3e^{\sigma^2} - 1$$

$$\eta^4 = (\eta^2)^2 = (e^{\sigma^2} - 1)^2 = e^{2\sigma^2} - 2e^{\sigma^2} + 1$$

$$m_3 = \alpha^3(\eta^6 + 3\,\eta^4) = e^{3\mu + \frac{3}{2}\sigma^2}(e^{3\sigma^2} - 3e^{2\sigma^2} + 3e^{\sigma^2} - 1 + 3e^{2\sigma^2} - 6e^{\sigma^2} + 3)$$

$$= e^{3\mu + \frac{3}{2}\sigma^2}\,(e^{3\sigma^2} - 3e^{\sigma^2} + 2)$$

$$= e^{3\mu} \cdot e^{\frac{3}{2}\sigma^2}\,(e^{3\sigma^2} - 3e^{\sigma^2} + 2)$$

$$= e^{3\mu} \cdot e^{\frac{3}{2}\sigma^2} \cdot e^{3\sigma^2} - 3e^{3\mu} \cdot e^{\frac{3}{2}\sigma^2} \cdot e^{\sigma^2} + 2e^{3\mu} \cdot e^{\frac{3}{2}\sigma^2}$$

$$= e^{3\mu} \cdot e^{\frac{9}{2}\sigma^2} - 3\, e^{3\mu} \cdot e^{\frac{5}{2}\sigma^2} + 2e^{3\mu}\, e^{\frac{3}{2}\sigma^2}$$

$$= e^{3\mu}\,(e^{\frac{9}{2}\sigma^2} - 3\, e^{\frac{5}{2}\sigma^2} + 2\, e^{\frac{3}{2}\sigma^2})$$

c.q.d.

$$m_4 = m_4' - 4\, m_1'.m_3' + 6(m_1')^2 \; . \; m_2' \; - 3(m_1')^4$$

$$m_4 = e^{4\mu + 8\sigma^2} - 4(e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2})(e^{3\mu + \frac{9}{2}\sigma^2}) + 6\,(e^{2\mu + \sigma^2})\,(e^{2\mu + 2\sigma^2}) - 3(e^{4\mu}e^{2\sigma^2})$$

$$m_4 = e^{4\mu} \,.\, e^{8\sigma^2} - 4(e^{\mu}.e^{\frac{1}{2}\sigma^2} . e^{3\mu} \,.\, e^{\frac{9}{2}\sigma^2}) + 6(e^{2\mu}.e^{\sigma^2}.e^{2\mu}.e^{2\sigma^2}) - 3(e^{4\mu} .\, e^{2\sigma^2})$$

$$m_4 = e^{4\mu} \,.\, e^{8\sigma^2} - 4(e^{4\mu} .\, e^{5\sigma^2}) + 6(e^{4\mu} .\, e^{3\sigma^2}) - 3(e^{4\mu} \,.\, e^{2\sigma^2})$$

$$m_4 = e^{4\mu}\,(e^{8\sigma^2} - 4e^{5\sigma^2} + 6e^{3\sigma^2} - 3e^{2\sigma^2})$$

Analogâmente, podemos verificar :

$$m_4 = \alpha^4\,(\eta^{12} + 6\,\eta^{10} + 15\,\eta^8 + 16\,\eta^6 + 3\,\eta^4)$$

Coeficiente de Assimetria:

$$\delta_1\,(x) = \frac{m^3}{\beta^3} = \frac{\alpha^3\,(\eta^6 + 3\,\eta^4)}{\alpha^3\,\eta^3} = \eta^3 + 3\,\eta$$

Coeficiente de Curtose:

$$\delta_2\,(x) = \frac{m_4}{\beta^4} - 3 = \frac{\alpha^4\,(\eta^{12} + 6\,\eta^{10} + 15\,\eta^8 + 16\,\eta^6 + 3\,\eta^4)}{\alpha^4 \,.\, \eta^4} - 3$$

$$\delta_2\,(x) = \eta^8 + 6\,\eta^6 + 15\,\eta^4 + 16\,\eta^2 + 3 - 3$$

$$\delta_2\,(x) = \eta^8 + 6\,\eta^6 + 15\,\eta^4 + 16\,\eta^2$$

A MODA DA DISTRIBUIÇÃO LOG-NORMAL

Como já verificado, $m_1' = \alpha = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$ representa a média aritmética da distribuição Log-Normal. Para a determinação da expressão da moda basta verificar o maximante da função Log-Normal de probabilidade.

$$f(x) = \frac{1}{x\,\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2\right]$$

Sabemos que : $d(uv) = u.dv + v.du$
$d(u)^n = n.u^{(n-1)}.\,du$

Portanto :

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{x}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln^2 x - 2.\ln x\,.\,\mu + \mu^2)\right].\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(2.\ln x.\frac{1}{x}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{2(1)}{x}\,.\,\mu\right)\right] + \left(\frac{-1}{x^2}\right)\,.\,\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2\right]\right\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{x}\,.\,\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln^2 x - 2.\ln x.\,\mu + \mu^2)\right].\left[\frac{1}{x\sigma^2}\cdot(-\ln x + \mu)\right] + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{-1}{x^2}\right).\,\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2\right]\right\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{x}\,.\,\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x + \mu)^2\right].\left[\frac{1}{x\sigma^2}(-\ln x + \mu)\right] + \left[\left(-\frac{1}{x^2}\right) : \exp\right.\right.$$

$$\left.\left.\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2\right]\right]\right\}$$

$$f'(x) = \left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,.\left(\frac{1}{x^2}\right)\,.\,\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2\right]\right\}\,.\,\left[\left(\frac{-\ln x + \mu}{\sigma^2}\right) - 1\right]$$

$$f'(x) = 0\ ; \quad \frac{-\ln x + \mu}{\sigma^2} - 1 = 0$$

$$\therefore \quad \ln x = \mu - \sigma^2$$

$$x = e^{(\mu - \sigma^2)}, \text{ é maximante pois } f''(x) < 0.$$

Portanto a moda é expressa por $e^{\mu - \sigma^2}$

Assim sendo a média geométrica $MG = e^{\mu}$ só poderá representar a medida da mediana.

Pontos de Inflexão

Pela resolução da segunda derivada, quando igualada a zero, obtem-se :

$$x = \exp. \left[\left(\mu - \frac{3\sigma^2}{2}\right) \pm \sigma \sqrt{1 + \frac{1}{4}\sigma^2}\right]$$

Relações entre as medidas de tendência central

$$MA > MG > MODA$$

$$\frac{MODA}{MA} = \left[\frac{MG}{MA}\right]^3 = e^{-\frac{3\sigma^2}{2}}$$

ÁREAS SOB A CURVA DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE LOG-NORMAL

Os Quantis de ordem q, ξ_q de $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ e z_q de $N(0, 1)$ relacionam-se pela expressão :

$$\xi_q = e^{\mu + z_q \cdot \sigma}$$

Por exemplo, o quartil inferior é $\xi_{25\%} = e^{\mu - 0,6745\sigma}$ já que na $N(0,1)$ uma área de 25% à esquerda corresponde a um desvio reduzido de (-0,6745).

Pode-se então definir o desvio padrão geométrico em relação à mediana :

Na $N(0,1)$:

$$z_q = 1 \text{ (UM DESVIO PADRÃO)} \Longrightarrow \text{ÁREA} = 84,13\%$$

portanto na $\Lambda(\mu, \sigma^2)$: $\xi_{84,13} = e^{\mu + 1\sigma}$

Se dividirmos pelo valor da mediana : $\xi_{50\%} = e^{\mu + 0\sigma} = e^{\mu}$

vem : $$\frac{\xi_{84,13\%}}{\xi_{50\%}} = \frac{e^{\mu + \sigma}}{e^{\mu}} = e^{\sigma} = \sigma_g$$

ou inversamente :

$$\sigma_g = \frac{\xi_{50\%}}{\xi_{15,87}} = \frac{e^{\mu}}{e^{\mu-\sigma}} = e^{\sigma}$$

Observa-se pela Definição acima que o Desvio Padrão Geométrico (σ_g) é adimensional e maior ou igual à unidade.

OUTRAS EXPRESSÕES DE INTERESSE :

- Relação entre o Desvio Padrão Geométrico, Média Aritmética e Variância:

$$\beta^2 = e^{2\mu+\sigma^2} \cdot (e^{\sigma^2} - 1)$$

$$\alpha = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

Pode-se notar que $\beta^2 = \alpha^2 \, (e^{\sigma^2} - 1)$

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = e^{\sigma^2} - 1$$

$$\therefore \quad e^{\sigma^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} + 1$$

$$\ln e^{\sigma^2} = \ln \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 1 \right)$$

$$\sigma^2 = \ln \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 1 \right) \quad \therefore \sigma = \ln^{0.5} \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 1 \right)$$

Sendo por definição $\sigma_g = e^{\sigma}$

$$e^{\sigma} = \exp \left[\ln^{0.5} \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 1 \right) \right]$$

$$\sigma_g = \exp \left[\ln^{0.5} \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 1 \right) \right]$$

- Relação entre Média Aritmética, Média Geométrica e Desvio Padrão Geométrico de uma mesma distribuição :

$$\alpha = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} = e^{\mu} \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2} = MG \cdot e^{0.5 \ln^2 \sigma_g}$$

$$MG = \frac{\alpha}{[\exp(0.5 \ln^2\sigma_g]}$$

ou,

$$\ln MG = \ln\alpha - 0.5 \ln^2\sigma_g$$

$$\ln\alpha = \ln MG + 0.5 \ln^2\sigma_g$$

- Relação entre a Moda, Média Geométrica e Desvio Padrão Geométrico:

Como verificado : $\text{Moda} = e^{\mu - \sigma^2} = \dfrac{e^{\mu}}{e^{\sigma^2}}$

$\therefore \quad \text{MODA} = \dfrac{MG}{e^{\sigma^2}}$

, sendo $\sigma_g = e^{\sigma}$

$\ln\sigma_g = \sigma$

$\ln^2\sigma_g = \sigma^2$

$$\therefore \quad \text{MODA} = \frac{MG}{e^{\ln^2\sigma_g}} = MG \,.\, \exp\,[- \ln^2\sigma_g]$$

Obs: $\text{MODA} = \dfrac{MG}{1 + \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}} = \dfrac{MG}{\eta^2+1}$

- Relação entre Variância, Média Geométrica e Desvio Padrão Geométrico:

$$MG = e^{\mu} \quad \therefore \quad (MG)^2 = e^{2\mu}$$

$$\beta^2 = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

$$\sigma_g = e^{\sigma} \quad \therefore \quad \sigma = \ln\sigma_g \Longrightarrow e^{\sigma^2} = e^{\sigma.\sigma} = e^{\ln^2\sigma_g} = \sigma_g^{\ln\sigma_g}$$

Portanto :

$$\beta^2 = (MG)^2 \,.\, \sigma_g^{\ln\sigma_g} \,.\, (\sigma_g^{\ln\sigma_g} - 1)$$

$$\ln\beta^2 = 2\ln MG + \ln^2\sigma_g + \ln(\sigma_g^{\ln\sigma_g} - 1)$$

- Representação formal do Desvio Padrão Geométrico :

$$Y : N(\mu ; \sigma^2) \Longrightarrow \sigma = \left[\frac{\Sigma f_i (Y_i - \mu)^2}{\Sigma f_i}\right]^{1/2}$$

Como $MG = e^{\mu} \Longrightarrow \mu = \ln MG$

$\sigma_g = e^{\sigma}$

$$\sigma_g = \exp \left[\frac{\Sigma f_i (\ln x_i - \ln MG)^2}{\Sigma f_i}\right]^{1/2}$$

Variável Reduzida

Para $Y : N(\mu ; \sigma^2) \Longrightarrow z = \dfrac{Y - \mu}{\sigma}$

Para $X : \Lambda (\mu ; \sigma^2)$

Sendo : $Y = \ln x$

$\ln MG = \mu$

$\ln \sigma_g = \sigma$

$$z = \frac{\ln x - \ln MG}{\ln \sigma_g}$$

$\therefore \; z \ln \sigma_g = \ln x - \ln MG$

$z \ln \sigma_g + \ln MG = \ln x$

$\ln (MG \cdot \sigma_g^{z}) = \ln x$

$$MG \cdot \sigma_g^{z} = x \quad \text{ou} \quad x = e^{\mu + z\sigma}$$

Obs: Pelo emprego da estatística de ordem é possível se verificar as coordenadas de plotagem das posições extremas .

Se for utilizada a média aritmética, em vez da mediana teremos :

$$MA = MG \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2} \Longrightarrow MG = MA \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$x = MG \cdot \sigma_g^{z}$$

$$x = MA \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2} \cdot e^{z\sigma}$$

$$x = MA \cdot e^{\sigma(z - \frac{1}{2}\sigma)}$$

$$x = MA \cdot \sigma_g^{(z - \frac{1}{2}\ln\sigma_g)}$$

Função Densidade de Probabilidade e Função Distribuição

Como já visto, para a distribuição Log-Normal, a função de densidade de probabilidade é expressa por :

$$f(x) = \frac{1}{x \sigma . \sqrt{2\pi}} \exp \left[- \frac{1}{2\sigma^2} (\ln x - \mu)^2 \right]$$

Pelas demonstrações anteriores : $\sigma = \ln \sigma_g$

$\mu = \ln MG$

Portanto pode-se também representar :

$$f(x) = \frac{1}{x . \sqrt{2\pi} . \ln \sigma_g} \exp \left[- \frac{(\ln x - \ln MG)^2}{2 \ln^2 \sigma_g} \right]$$

$$f(x) = \frac{1}{x . \sqrt{2\pi} . \ln \sigma_g} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \left[\frac{\ln \left(\frac{x}{MG}\right)}{\ln \sigma_g} \right]^2 \right\}$$

A função de distribuição entre dois valores M_1 e M_2 do domínio da função de densidade pode ser representado por :

$$F(x) = \int_{\ln M_1}^{\ln M_2} f(x) . dx$$

$$F(x) = \int_{\ln M_1}^{\ln M_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi} . \ln \sigma_g} \exp \left\{ - \frac{1}{2} . \left[\frac{\ln \left(\frac{x}{MG}\right)}{\ln \sigma_g} \right]^2 \right\} \frac{dx}{x}$$

$$F(x) = \int_{\ln M_1}^{\ln M_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \ln \sigma_g} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \left[\frac{\ln \frac{x}{MG}}{\ln \sigma_g} \right]^2 \right\} d(\ln x)$$

Se utilizarmos a definição de Desvio Reduzido (z), teremos :

$$z = \frac{\ln\left(\frac{x}{MG}\right)}{\ln \sigma_g}$$

$$\therefore \quad \ln x = z.\ln\sigma_g + \ln MG$$

$$d(\ln x) = \ln\sigma_g \;.\; dz \text{ ; substituindo vem :}$$

$$F(x) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\ln \sigma_g} \exp \left[- \frac{1}{2} z^2 \right] . \ln\sigma_g \,.\, dz$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} \exp \left[\frac{1}{2} z^2 \right] dz$$

Exemplos :

a)-Para verificar a fração acumulada menor que a média Geométrica (MG) teremos para as expressões com limites logarítmos de integração, os seguintes valores :

$$M_1 = 0$$
$$M_2 = MG$$

Sendo : $z = \dfrac{\ln\left(\frac{x}{MG}\right)}{\ln \sigma_g}$

Para $x = M_1 = 0$

$$z_1 = \frac{\ln M_1 - \ln MG}{\ln \sigma_g}$$

$$\lim_{M_1 \to 0} \ln M_1 = -\infty$$

Das igualdades simbólicas sabe-se que :

P - número positivo

N - número negativo

$$-\infty + N = -\infty$$

onde $N = -\ln MG$ é um número negativo.

$$z_1 = \frac{-\infty + N}{P} = \frac{-\infty}{P} = -\infty$$

Para $x = M_2$

$$z_2 = \frac{\ln M_2 - \ln MG}{\ln \sigma_g} = \frac{\ln (\frac{MG}{MG})}{\ln \sigma_g} = 0$$

Assim sendo para $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz$,

Pode-se provar que $\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2(\frac{1}{2})^{1/2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{1}{2}$$

Isto prova que a Média Geométrica é a mediana, sendo a medida de tendência central na distribuição Log-Normal.

b)- Verificar a fração de área sob a curva tendo como limites de integração $M_1 = MG$ e $M_2 = (\sigma_g.MG)$

$M_1 = MG$, como já visto $z_1 = 0$

$M_2 = \sigma_g.MG$

$$z = z_2 = \frac{\ln (\frac{x}{MG})}{\ln \sigma_g} = \frac{\ln(\frac{\sigma_g.MG}{MG})}{\ln \sigma_g} = 1$$

Portanto,

$$F(x) = \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{z}{\sqrt{2}})^2} . dz$$

e^{-u^2} pode ser desenvolvida em série, como abaixo, para valores de $u \leqslant 1,7$; no caso de valores maiores deve ser utilizado o método de desenvolvimento assintótico.

$$e^{-(\frac{z}{\sqrt{2}})^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (i)^{2k} \frac{(\frac{z}{\sqrt{2}})^{2k}}{k!}$$

Sendo $i = \sqrt{-1}$; $\left| \begin{array}{l} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \end{array} \right.$

$$e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{(z/\sqrt{2})^0}{0!} - \frac{(z/\sqrt{2})^2}{1!} + \frac{(z/\sqrt{2})^4}{2!} - \frac{(z/\sqrt{2})^6}{3!} + \frac{(z/\sqrt{2})^8}{4!} - \frac{(z/\sqrt{2})^{10}}{5!} + \frac{(z/\sqrt{2})^{12}}{6!} - \frac{(z/\sqrt{2})^{14}}{7!} + \frac{(z/\sqrt{2})^{16}}{8!} - \frac{(z/\sqrt{2})^{18}}{9!}$$

Rearranjando,

$$e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{3.z^4}{4!} - \frac{15.z^6}{6!} + \frac{105.z^8}{8!} - \frac{945.z^{10}}{10!} + \frac{10395.z^{12}}{12!} - \frac{135135.z^{14}}{14!} + \frac{2027025.z^{16}}{16!} - \frac{34459425.z^{18}}{18!}$$

$$\int_0^1 e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2}.dz = \int_0^1 \left[1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{3.z^4}{4!} - \frac{15.z^6}{6!} + \frac{105.z^8}{8!} - \frac{945.z^{10}}{10!} + \frac{10395.z^{12}}{12!} - \frac{135135.z^{14}}{14!} + \frac{2027025.z^{16}}{16!} - \frac{34459425.z^{18}}{18!}\right].dz$$

$$\int_0^1 e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2}.dz = \left[z - \frac{z^3}{3.2!} + \frac{3.z^5}{5.4!} - \frac{15.z^7}{7.6!} + \frac{105.z^9}{9.8!} - \frac{945.z^{11}}{11.10!} + \frac{10395.z^{13}}{13.12!} - \frac{135135.z^{15}}{15.14!} + \frac{2027025.z^{17}}{17.16!} - \frac{34459425.z^{19}}{19.18!}\right]_0^1$$

$$\int_0^1 e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2}.dz = \left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{3.z^5}{5!} - \frac{15.z^7}{7!} + \frac{105.z^9}{9!} - \frac{945.z^{11}}{11!} + \frac{10395.z^{13}}{13!} - \frac{135135.z^{15}}{15!} + \frac{2027025.z^{17}}{17!} - \frac{34459425.z^{19}}{19!}\right]_0^1$$

$$\int_0^1 e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2}.dz = 0{,}8556243919$$

Assim sendo :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2}.dz = \frac{1}{\sqrt{2}}.(0{,}8556)$$

$$F(x) = 0{,}3413$$

Tal resultado comprova a exatidão da definição anterior para o Desvio Padrão Geométrico.

c - Em que percentil fica localizada a Média Aritmética (MA) de uma Distribuição Log-Normal ?

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1 = -\infty}^{z_2} e^{-\frac{1}{2} z^2} . dz$$

$$\alpha = MA = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} = e^{\ln MG + \frac{1}{2}\ln^2\sigma_g}$$

$$\therefore \ln MA = \ln MG + \frac{1}{2}\ln^2\sigma_g$$

$$z_2 = \frac{\ln x - \ln MG}{\ln\sigma_g} = \frac{\ln MA - \ln MG}{\ln\sigma_g} = \frac{[(\ln MG + \frac{1}{2}\ln^2\sigma_g) - \ln MG]}{\ln\sigma_g}$$

$z = \frac{1}{2}\ln\sigma_g$; Portanto a posição de MA é função exclusiva do Desvio Padrão Geométrico.

Por exemplo, podemos tabelar :

σ_g	$z_2 = \ln\sigma_g$	% ÁREA = 100 F(x)
1	0	50,00
1,3	0,1312	55,22
1,5	0,2027	58,03
1,7	0,2653	60,46
2,0	0,3466	63,56
2,3	0,4165	66,15
2,5	0,4581	67,66
2,7	0,4966	69,03
3,0	0,5493	70,86
4,0	0,6931	75,59
4,5	0,7520	77,40
5,5	0,8524	80,30
6,0	0,8959	81,48

O PAPEL LOGARITMO PROBABILIDADE

Em geral, os formatos do papel gráfico comercial americano têm a dimensão de $8\frac{1}{2}$ in. vs 11 in. A grade gráfica propriamente dita é apresentada em duas dimensões básicas conforme o número de ciclos logaritmos de base 10 existentes.

O gradeamento mais comum apresenta 2 ciclos logaritmicos de dimensão total $7\frac{1}{2}$ in como ordenada. A abcissa de dimensão total $9\frac{1}{4}$ in apresenta a escala normal de probabilidade com frequências acumuladas variando de 0,01% à 99,99%. O outro tipo de gradeamento, menos difundido, apresenta na abcissa 3 ciclos logaritmos com dimensão total de 9 in. Na ordenada, a frequência acumulada varia de 2% a 98% com dimensão total de $6\frac{1}{2}$ in.

CONSTRUÇÃO (papel 2 ciclos $\log_{10}$ x probabilidade)

. Escala normal probabilidade ($9\frac{1}{4}$ in)

As frequências acumuladas são provenientes da correspondência com a escala da variável reduzida (z), simétrica à probabilidade acumulada de 50% e encontrada sob forma de tabelas nos textos estatísticos.

Para o papel acima referido, de dois ciclos logaritmos, são utilizadas as seguintes relações, correspondentes à escala de áreas :

ÁREA	$\|z\|$	ÁREA	$\|z\|$	ÁREA	$\|z\|$	ÁREA	$\|z\|$
50%	0,0000	16%	0,9944	1,0%	2,3263	0,01%	3,7190
48%	0,0500	15%	1,0364	0,9%	2,3656		
46%	0,1002	14%	1,0804	0,8%	2,4089		
44%	0,1506	13%	1,1265	0,7%	2,4573		
42%	0,2015	12%	1,1751	0,6%	2,5121		
40%	0,2530	11%	1,2266	0,5%	2,5758		
38%	0,3050	10%	1,2816	0,4%	2,6521		
36%	0,3580	9%	1,3409	0,3%	2,7478		
34%	0,4120	8%	1,4053	0,2%	2,8782		
32%	0,4673	7%	1,4761	0,15%	2,9677		
30%	0,5244	6%	1,5551	0,1%	3,0902		
28%	0,5825	5%	1,6449	0,09%	3,1214		
26%	0,6430	4%	1,7511	0,08%	3,1559		
24%	0,7060	3%	1,8812	0,07%	3,1947		
22%	0,7720	2%	2,0537	0,06%	3,2389		
20%	0,8416	1,8%	2,0969	0,05%	3,2905		
19%	0,8778	1,6%	2,1444	0,04%	3,3528		
18%	0.9153	1,4%	2,1973	0,03%	3,4316		
17%	0,9541	1,2%	2,2571	0,02%	3,5401		

Escala Logaritmica : ($7\frac{1}{2}$ in)

Para cada ciclo logaritmo na base 10 :

$$x = m \log_{10} \alpha$$

m - módulo do ciclo logaritmico

x - comprimento linear do valor do ciclo logaritmico de base 10.

α	x
0	N.E
1	0
10	m

Para o gráfico em discussão, conforme o gradeamento já mencionado :

Ordenada : $2m = 7\frac{1}{2}$ in = 19,05 cm

$m = 3\frac{3}{4}$ in = 9,525 cm

Abcissa : $9\frac{1}{4}$ in = 23,495 cm = (2 x 3,7190)z

$\therefore$ z = 3,15878 cm

Podemos através de simples regra de três verificar :

Na ordenada :

z = 0,33163 . (ciclo logaritmico)

$\therefore$ 1 mm = 0,0105.(ciclo logaritmico)

Na abcissa :

$\therefore$ 1 mm = 0,03166 . (z)

Esta discrepância de graduação correspondente à escala linear (absoluta) entre os dois eixos impede análises quantitativas de forma direta conforme explicitado por F. Kottler (Distribution of Particle Sizes Part II - J. Franklin Institute 250, (1950)), que recomenda o uso de Logaritmos na Base (e) e uma relação linear de :

1 mm = 0,02 unidades do logaritmo natural ($\ln e = \log_e^e$)

1 mm = 0,02 unidades de desvio reduzido.

Isto é ; z = m

DESVIO REDUZIDO DE PONTOS SINGULARES EM RELAÇÃO À MÉDIA ARITMÉTICA

$$\xi_\alpha = \frac{\xi_q - \alpha}{\beta} = \frac{e^{z_q\cdot\sigma} - e^{\frac{1}{2}\sigma^2}}{[e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)]^{1/2}} = \frac{(e^{z_q\cdot\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2} - 1)}{(e^{\sigma^2}-1)^{1/2}}$$

onde : $\xi_q = e^{\mu + z_q\cdot\sigma}$ (Quantil da Log-Normal)

$\alpha = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$ (Média Aritmética)

$\beta^2 = e^{2\mu + \sigma^2} . (e^{\sigma^2} - 1)$ (Variância)

A tabela abaixo ilustra os afastamentos em cada ramo da curva em relação à Média Aritmética.

α \ σ	(Upper tail) (Lower tail)	99.95 0.05	99.9 0.1	99.75 0.25	99.5 0.5	99 1	97.5 2.5	95 5	90 10	75 25	50 (median)
0.02		3.39 −3.19	3.18 −3.01	2.88 −2.74	2.63 −2.52	2.37 −2.28	1.99 −1.93	1.66 −1.63	1.29 −1.27	0.669 −0.680	−0.010
0.04		3.49 −3.10	3.27 −2.92	2.95 −2.67	2.69 −2.46	2.42 −2.24	2.02 −1.90	1.68 −1.61	1.29 −1.27	0.663 −0.680	−0.020
0.06		3.60 −3.01	3.36 −2.84	3.02 −2.61	2.75 −2.41	2.46 −2.20	2.04 −1.87	1.69 −1.59	1.30 −1.26	0.657 −0.689	−0.030
0.08		3.71 −2.29	3.45 −2.76	3.09 −2.54	2.81 −2.36	2.50 −2.15	2.07 −1.85	1.71 −1.57	1.30 −1.25	0.650 −0.693	−0.040
0.10		3.82 −2.83	3.54 −2.69	3.17 −2.48	2.87 −2.30	2.55 −2.11	2.10 −1.82	1.72 −1.56	1.31 −1.24	0.643 −0.697	−0.050
0.12		3.93 −2.75	3.64 −2.61	3.24 −2.42	2.93 −2.25	2.60 −2.07	2.13 −1.79	1.74 −1.54	1.31 −1.23	0.635 −0.701	−0.060
0.14		4.05 −2.67	3.74 −2.54	3.32 −2.36	2.99 −2.20	2.64 −2.03	2.15 −1.76	1.75 −1.52	1.31 −1.23	0.628 −0.704	−0.069
0.16		4.17 −2.59	3.84 −2.47	3.40 −2.30	3.05 −2.15	2.69 −1.98	2.18 −1.73	1.77 −1.50	1.32 −1.22	0.620 −0.706	−0.079
0.18		4.29 −2.51	3.95 −2.40	3.48 −2.24	3.11 −2.10	2.73 −1.94	2.21 −1.70	1.78 −1.48	1.32 −1.21	0.611 −0.708	−0.089
0.20		4.42 −2.44	4.05 −2.33	3.56 −2.18	3.17 −2.05	2.78 −1.90	2.23 −1.67	1.79 −1.46	1.32 −1.14	0.603 −0.714	−0.098
0.30		5.10 −2.10	4.61 −2.03	3.97 −1.92	3.49 −1.82	3.00 −1.71	2.35 −1.53	1.84 −1.36	1.32 −1.14	0.555 −0.714	−0.143
0.40		5.86 −1.81	5.23 −1.76	4.41 −1.68	3.81 −1.61	3.22 −1.53	2.45 −1.39	1.88 −1.25	1.30 −1.07	0.502 −0.709	−0.185
0.50		6.71 −1.56	5.89 −1.52	4.86 −1.47	4.13 −1.42	3.42 −1.36	2.54 −1.25	1.89 −1.15	1.27 −1.00	0.444 −0.695	−0.220
1.00		11.66 −0.746	9.41 −0.742	6.90 −0.735	5.32 −0.728	3.98 −0.718	2.52 −0.698	1.63 −0.674	0.904 −0.634	0.145 −0.527	−0.300

Exemplo :

para: $q = 50\%$ $z_q = 0$

$\sigma = 1$

$$\xi_{\alpha=50\%} = \frac{e^{(z_q - \frac{1}{2}\sigma^2)} - 1}{(e^{\sigma^2}-1)^{1/2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sigma^2} - 1}{(e^{\sigma^2}-1)^{1/2}} = \frac{0{,}60653 - 1}{1{,}3108} = -\frac{0{,}39347}{1{,}3108}$$

$$\xi_{\alpha=50\%} = -\,0{,}300$$

DISTRIBUIÇÃO DE MOMENTOS

A propriedade de momentos possuirem uma função de distribuição é peculiar de distribuições cuja a variável aleatória seja definida no campo positivo. Portanto tal propriedade não tem paralelo na distribuição normal de probabilidade.

Denomina-se função de distribuição de momento de ordem r de $\Lambda\ (\mu\ ,\sigma^2)$ a expressão :

$$\Lambda_r\ (x|\mu\ ,\sigma^2) = \frac{1}{m'_r}\int_0^x u^r\ .\ d\ \Lambda\ \ (u|\mu\ ,\sigma^2)$$

onde $m'_r = e^{r\,\mu + \frac{1}{2}\,r^2\sigma^2}$ como já verificado.

TEOREMA FUNDAMENTAL :

"A r - ÉSIMA distribuição de momento de uma distribuição Log-Normal de parâmetros $(\mu\ ,\sigma^2)$ é também uma distribuição Log-Normal de parâmetros :

$[(\mu + r\sigma^2),\ \sigma^2]$"

PROVA :

$$\Lambda_r(x|\mu\ ,\sigma^2) = e^{-r\mu-\frac{1}{2}\,r^2\sigma^2}\int_0^x e^{r\ln u}\ .\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,u\,\sigma}\ \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\,(\ln u - \mu)^2\right]\ .\ du$$

$$\Lambda_r(x|\mu\ ,\sigma^2) = \int_0^x e^{-r\mu-\frac{1}{2}\,r^2\sigma^2 + r\ln u - \frac{1}{2\sigma^2}(\ln u - \mu)^2}\ .\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}u\sigma}\ .\ du$$

$$\Lambda_r(x|\mu\ ,\sigma^2) = \int_0^x e^{-r\mu-\frac{1}{2}\,r^2\sigma^2 + r\ln u - \frac{1}{2\sigma^2}(\ln^2 u - 2\ln u\mu + \mu^2)}\ .\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}u.\sigma}\ .\ du$$

$$\Lambda_r(x|\mu\ ,\sigma^2) = \int_0^x e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\,(2r\mu\sigma^2 + r^2\sigma^4 - 2\sigma^2 r\ln u + \ln^2 u - 2\mu.\ln u + \mu^2)}\ .\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}u.\sigma}\ .\ du$$

O Termo $(2.r.\mu\sigma^2 + r^2\sigma^4 - 2\sigma^2.r.\ln u + \ln^2 u - 2.\mu.\ln u + \mu^2)$

Corresponde ao desenvolvimento de $[\ln u - (\mu + r\sigma^2)]^2$ como pode-se verificar abaixo :

$$[\ln u - (\mu + r\,\sigma^2)]^2 = \ln^2 u - 2.\ln u\,.(\mu + r\sigma^2) + (\mu + r\sigma^2)^2$$
$$= \ln^2 u - 2\ln u.\mu - 2\ln u\,.\,r\sigma^2 + \mu^2 + 2.\mu.r.\sigma^2 + r^2\sigma^4$$

c.q.d..

Portanto :

$$\Lambda_r(x|\mu\,,\,\sigma^2) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,.u\,.\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\ln u - (\mu + r\sigma^2)\right]^2\right\}.\,du$$

Podemos notar que o integrando é a função densidade de probabilidade $d\Lambda_r(u|\mu + r\sigma^2\,,\,\sigma^2)$; assim sendo :

$$\Lambda_r(x|\mu\,,\sigma^2) = \Lambda\,(x|\mu + r\sigma^2,\,\sigma^2)$$

ALGUNS COROLÁRIOS RESULTANTES DO TEOREMA FUNDAMENTAL DE DISTRIBUIÇÃO DE MOMENTOS :

Corolário 1 :

O valor da variável independente correspondente à média geométrica de uma distribuição Log-Normal de momento (r) é o mesmo atinente à moda da distribuição de momento (r+1).

$$MG_r = e^{\mu + r.\sigma^2} = e^{\mu_r}$$

$$\underset{(r+1)}{MODA} = e^{\mu_{r+1} - \sigma^2} = e^{[\mu + (r+1)\sigma^2] - \sigma^2} = e^{\mu + r\sigma^2} = e^{\mu_r}$$

Corolário 2 :

A interseção entre as funções densidade de probabilidade de duas distribuições de momentos de ordem consecutiva (r) e (r+1) é o valor da variável independente correspondente à média aritmética da primeira distribuição.

$$f_r(x) \cap f_{r+1}(x) \Longrightarrow x = e^{\mu + (r + \frac{1}{2})\sigma^2}$$

$$MA_r = e^{\mu_r + \frac{1}{2}\sigma^2} = e^{(\mu + r\sigma^2) + \frac{1}{2}\sigma^2} = e^{\mu + (r + \frac{1}{2})\sigma^2}$$

Corolário 3 :

A interseção entre a função de densidade de probabilidade da distribuição de momento (r) com a da distribuição de momento (r+2) é o valor da variável independente correspondente à moda da função de ordem (r+2). Adicionalmente pelo Corolário 1, o valor obtido corresponde também à moda geométrica da distribuição de ordem (r+1)

$$f_r(x) \cap f_{r+2}(x) \Longrightarrow x = e^{\mu + (r+1)\sigma^2}$$

$$\underset{(r+2)}{\text{MODA}} = e^{\mu_{r+2} - \sigma^2} = e^{[\mu + (r+2)\sigma^2] - \sigma^2} = e^{\mu + (r+1)\sigma^2}$$

$$\underset{(r+1)}{\text{MG}} = e^{\mu_{r+1}} = e^{\mu + (r+1)\sigma^2}$$

Corolário 4 :

A interseção entre a função de densidade de probabilidade da distribuição de momento (r) com a distribuição de momento (r+3) é o valor da variável independente correspondente à média aritmética da distribuição de ordem (r+1). Portanto este valor e o obtido pela aplicação do Corolário 2 às distribuições (r+1) e (r+2) estão na mesma vertical ao eixo da variável independente.

$$f_r(x) \cap f_{r+3}(x) \Longrightarrow e^{\mu + (r + \frac{3}{2})\sigma^2}$$

$$\underset{(r+1)}{\text{MA}} = e^{\mu_{r+1} + \frac{1}{2}\sigma^2} = e^{[\mu + (r+1)\sigma^2] + \frac{1}{2}\sigma^2} = e^{\mu + (r + \frac{3}{2})\sigma^2} .$$

Corolário 5 :

A interseção entre a função densidade de probabilidade da distribuição de momento (r) com a da distribuição de momento (r+4) é o valor da variável independente correspondente à média geométrica da distribuição de momento (r+2). Consequentemente, pelo Corolário 1, corresponde também à moda da distribuição de momento de ordem (r+3).

Face ao exposto, a moda da distribuição (r+3), a mediana da distribuição (r+2) e a interseção citada são pontos de uma mesma vertical ao eixo - da variável independente.

$$f_r(x) \cap f_{r+4}(x) \Longrightarrow e^{\mu + (r+2)\sigma^2}$$

$$\underset{r+2}{\text{MG}} = e^{\mu_{r+2}} = e^{\mu + (r+2)\sigma^2}$$

$$\underset{r+3}{\text{MODA}} = e^{\mu_{r+3} - \sigma^2} = e^{[\mu + (r+3)\sigma^2] - \sigma^2} = e^{\mu + (r+2)\sigma^2}$$

COROLÁRIO 6 :

Em uma família de curvas de densidade de probabilidade correspondentes às distribuições de momento originadas de uma mesma distribuição log-normal, qualquer ponto de interseção entre qualquer par de curvas apresenta a propriedade de através de uma perpendicular traçada pela abcissa ao ponto, limitar lateralmente áreas complementares contidas sob cada curva e a abcissa, desde a origem.

Consequentemente, o ponto de interseção apresenta em relação à mediana correspondente, em cada curva, o mesmo módulo de desvio reduzido, algebricamente simétrico na sua posição em uma curva em relação à outra. Tal fato significa que a área compreendida entre a curva e as verticais que contêm o ponto e a mediana são idênticas em cada curva.

$$f(x) \cap f_r(x) \Longrightarrow x = e^{\mu + \frac{r}{2}\sigma^2}$$

$$f_r(x) \cap f_{r+1}(x) \Longrightarrow x = e^{\mu + (r + \frac{1}{2})\sigma^2}$$

$$f_r(x) \cap f_{r+2}(x) \Longrightarrow x = e^{\mu + (r + \frac{2}{2})\sigma^2}$$

$$f_r(x) \cap f_{r+3}(x) \Longrightarrow x = e^{\mu + (r + \frac{3}{2})\sigma^2}$$

$$f_r(x) \cap f_{r+4}(x) \Longrightarrow x = e^{\mu + (r + \frac{4}{2})\sigma^2}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$f_r(x) \cap f_{r+h}(x) \Longrightarrow x = e^{\mu + (r + \frac{h}{2})\sigma^2}$$

Conforme já verificado qualquer ponto de interseção de uma distribuição log-normal pode ser representado por :

$$x = MG_r \sigma g^{z_r} = MG_{r+h} \sigma g^{z_{r+h}}$$

$$\text{sendo : } MG_r = e^{\mu + r\sigma^2}$$

$$MG_{r+h} = e^{\mu + (r + h)\sigma^2}$$

$$\frac{MG_{r+h} \cdot \sigma g^{z_{r+h}}}{MG_r \cdot \sigma g^{z_r}} = 1$$

$$\frac{e^{\mu + (r+h)\sigma^2} \cdot \sigma g^{z_{r+h}}}{e^{\mu + r\sigma^2} \cdot \sigma g^{z_r}} = 1$$

$$e^{h\sigma^2} \cdot \sigma g^{(z_{r+h} - z_r)} = 1$$

$$\sigma g = e^{\sigma}$$

$$\therefore \quad e^{h\sigma^2} \cdot e^{\sigma(z_{r+h} - z_r)} = 1$$

$$e^{h\sigma^2 + \sigma(z_{r+h} - z_r)} = 1$$

$$\therefore \quad h\sigma^2 + \sigma(z_{r+h} - z_r) = 0$$

$$h\sigma + (z_{r+h} - z_r) = 0$$

$$\therefore \quad (z_{r+h} - z_r) = -h\sigma \qquad (1)$$

Sendo $f_r(x) \cap f_{r+h}(x) \Longrightarrow x = e^{\mu + (r + \frac{h}{2})\sigma^2}$, uma interseção genérica, pode-se verificar:

$$x = e^{\mu + r\sigma^2 + \frac{h}{2}\sigma^2}$$

Pelo teorema fundamental da distribuição de momentos $\mu_r = \mu + r\sigma^2$

$$x = e^{\mu_r + \frac{h}{2}\sigma^2} \qquad (2)$$

Em cada distribuição o mesmo valor da variável independente expressará uma ordem de quantil diversa.

$$x = e^{\mu_r + z_r\sigma} \qquad (3)$$

Igualando (2) a (3) :

$$e^{\mu_r + \frac{h}{2}\sigma^2} = e^{\mu_r + z_r\sigma}$$

$$\therefore \quad \frac{h}{2}\sigma^2 = z_r\sigma$$

$$z_r = \frac{h}{2}\sigma$$

Substituindo em (1)

$$z_{r+h} - \frac{h}{2}\sigma = -h\sigma$$

$$z_{r+h} = -\frac{h}{2}\sigma$$

Assim sendo : $z_r = \frac{h}{2}\sigma$

$$z_{r+h} = -\frac{h}{2}\sigma$$

Portanto a simetria em relação à mediana garante a complementaridade das áreas.

c.q.d.

PROPRIEDADES DA DISTRIBUIÇÃO LOGARITMO NORMAL DE DOIS PARÂMETROS

- Se X for $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ distribuído e sendo b e c constantes, onde $c > 0$ (por exemplo $c = e^a$), então cX^b será distribuído segundo $\Lambda(a + b\mu, b^2\sigma^2)$

- Se X_1 for $\Lambda(\mu_1, \sigma_1^2)$ e X_2 for $\Lambda(\mu_2, \sigma_2^2)$ então $X_1 X_2$ será distribuído segundo $\Lambda(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

COROLÁRIOS :

$$\cdot \int_0^\infty \Lambda\left(\frac{a}{x} \middle| \mu_1, \sigma_1^2\right) . d\Lambda(x|\mu_2, \sigma_2^2) = \Lambda(a|\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$\cdot \int_0^\infty \Lambda(ax^b|\mu_1, \sigma_1^2) . d\Lambda(x|\mu_2, \sigma_2^2) = \Lambda(a|\mu_1 - b\mu_2; \sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$$

- Se $\{X_j\}$ for uma sequência de variáveis Log-Normais independentes, sendo $X_j\ \Lambda(\mu_j, \sigma_j^2)$; sendo $\{b_j\}$ uma sequência de constantes e sendo $c = e^a$ uma constante positiva,

  Se $\sum_j b_j \mu_j$ e $\sum_j b_j^2 \sigma_j^2$ convergirem,

  então o produto $c.\prod_j X_j^{b_j}$ será distribuido segundo $\Lambda(a + \sum_j b\mu_j, \sum_j b_j^2 \sigma_j^2)$.

COROLÁRIO:

. Se $X_j (j = 1 \ldots, n)$ são variáveis Log-Normais independentes de mesmos parâmetros μ e σ^2, a sua média geométrica será distribuída segundo $\Lambda(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

- Se X_1 e X_2 forem duas variáveis independentes e positivas tal que seu produto $X_1 . X_2$ seja uma variável Log-Normal, então tanto X_1 como X_2 serão Log-Normalmente distribuídos (como caso especial uma das variáveis pode ser uma constante e a outra Log-Normalmente distribuída).

EXPRESSÃO DOS VALORES MÉDIOS GEOMÉTRICOS DE ATRIBUTOS DE PARTICULADOS

Conforme verificado :

$$\Lambda_r(x|\mu\ ;\ \sigma^2) = \frac{1}{m'_r}\int_0^\infty x^r\ .\ d\Lambda\ (x|\mu\ ;\sigma^2) = \Lambda[x|(\mu + r\sigma^2);\ \sigma^2] = \Lambda(x|\mu_r\ ;\sigma^2)$$

Em qualquer distribuição Log-Normal : $MG = e^{\mu}$; logo

$$MG_r = e^{\mu_r} = e^{\mu + r\sigma^2} = e^{\ln MG + r\ \ln^2\sigma_g}$$

$$\ln MG_r = \ln MG + r\ln^2\sigma_g$$

De uma forma genérica para a p-ésima potência da média geométrica do atributo de diâmetro da distribuição de ordem r :

$$MG_r = e^{\mu_r}$$

$$(MG^p)_r = e^{p.\mu_r} = e^{p(\mu + r\sigma^2)} = e^{p\ln MG + rp\ \ln^2\sigma_g}$$

$$\ln(MG^p)_r = p\ln MG + r.p\ln^2\sigma_g$$

EXPRESSÃO DOS VALORES MÉDIOS ARITMÉTICOS DE ATRIBUTOS DE DIÂMETRO DE PARTICULADOS.

Foi verificado que :

$$\int_0^\infty f_r(x)\ dx = \frac{1}{m'_r}\int_0^\infty x^r f(x)\ dx = \Lambda_r(x|\mu\ ;\sigma^2) = \Lambda[x|(\mu + r\sigma^2;\ \sigma^2)]$$

$$m'_r = \int_0^\infty x^r\ .\ f(x)\ .\ dx = e^{r\mu + \frac{1}{2}r^2\sigma^2} = e^{r\ln MG + \frac{1}{2}r^2\ln^2\sigma_g}$$

Então para o primeiro momento da distribuição de ordem r, isto é para a média aritmética, teremos :

$$MA_r = \int_0^\infty x.f_r(x).dx = \frac{1}{m'_r}\int_0^\infty x.x^r\ f(x)\ dx$$

$$MA_r = \int_0^\infty x.f_r(x).dx = \frac{1}{m'_r}\int_0^\infty x^{r+1}.\ f(x)\ .\ dx$$

$$MA_r = \int_0^\infty x.f_r(x).dx = \frac{\int_0^\infty x^{r+1}.f(x).dx}{\int_0^\infty x^r.f(x).dx} = \frac{m'_{r+1}}{m'_r}$$

$$\left|\begin{array}{l} \ln m'_r = r\ln MG + \frac{1}{2} r^2 \ln^2\sigma_g. \\ \ln m'_{r+1} = (r+1)\ln MG + \frac{1}{2}(r+1)^2\ln^2\sigma_g \end{array}\right.$$

$$\ln MA_r = \ln \frac{m'_{r+1}}{m'_r} = (r+1)\ln MG + \frac{1}{2}(r^2+2r+1)\ln^2\sigma_g - r\ln MG - \frac{1}{2} r^2\ln^2\sigma_g$$

$$\ln MA_r = \ln \frac{m'_{r+1}}{m'_r} = \ln MG + (r + \frac{1}{2})\ \ln^2\sigma_g$$

De uma forma genérica, para a p-ésima potência da média aritmética da distribúição de ordem r (p-ésimo momento);

$$\ln(MA^p)_r = \frac{m'_{r+p}}{m'_r} = p\ln MG + \frac{1}{2}\ p(2r + p)\ \ln^2\sigma_g$$

DISTRIBUIÇÃO EM NÚMERO : ATRIBUTOS DE DIÂMETRO

Todos os atributos de diâmetro ficam determinados pelo uso da expressão :

$$\frac{m'_r}{m'_0} = r \ln \ MG + \frac{1}{2} r^2 \ln^2 \sigma_g$$

. MOMENTO DE ORDEM ZERO: $m'_0 = \int_0^\infty f(x)dx = N_\infty$, representa a concentração total de partículas do aerossol em um certo local e tempo.

. PRIMEIRO MOMENTO: $\frac{m'_1}{m'_0} = \frac{\int_0^\infty x.f(x).dx}{\int_0^\infty f(x)dx} = MA_N$, representa o diâmetro médio aritmético, em número, das partículas do aerossol.

$$MA_N = \frac{m'_1}{m'_0} = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \ ; \ MG = e^{\mu}; \quad \sigma_g = e^{\sigma}$$

$$\ln MA_N = \ln MG + \frac{1}{2} \ln^2 \sigma_g$$

O tamanho de partícula em número encontra significado sanitário, por exemplo, na avaliação do risco de silicose.

. SEGUNDO MOMENTO : $\frac{m'_2}{m'_0} = \frac{\int_0^\infty x^2.f(x)dx}{\int_0^\infty f(x).dx} = e^{2\mu + 2\sigma^2}$

$$MA_{SA} = \left(\frac{m'_2}{m'_0}\right)^{1/2} = \left(e^{2\mu + 2\sigma^2}\right)^{1/2}$$

$$\ln MA_{SA} = \ln MG + 1 \ \ln^2 \sigma_g$$

Onde MA_{SA} representa o diâmetro médio de área superficial da distribuição em número. No caso, $(\pi) . \frac{m'_2}{m'_0} = \frac{A}{N_\infty}$ é a área superficial média por partícula.

. TERCEIRO MOMENTO : $\frac{m'_3}{m'_0} = \frac{\int_0^\infty x^3 f(x)dx}{\int_0^\infty f(x)dx} = e^{3\mu} + 4{,}5 \ \ln^2 \sigma$

$\frac{\pi}{6} m_3' = V$; isto é o Terceiro Momento é proporcional ao volume total (V) de material particulado dispersado no fluido $\left(\frac{cm^3 material}{cm^3 fluido}\right)$

No caso da densidade da partícula ser independente do seu tamanho o terceiro momento será proporcional à massa total de material particulado.

$$\frac{\pi}{6}\frac{m_3'}{m_0'} = \bar{v} \text{ (volume médio da partícula)}$$

$$MA_V = \left(\frac{m_3'}{m_0'}\right)^{1/3} = e^{(3\mu + 4,5 \ln^2\sigma_g)^{1/3}}$$

$$\ln MA_V = \ln MG + 1,5 \ln^2\sigma_g$$

Onde MA_V representa o diâmetro médio em volume em uma distribuição em número.

QUARTO MOMENTO : $m_4' = \int_0^\infty x^4.f(x).d(x) \; . \; \int_0^\infty f(x)dx$

É proporcional à área superficial total do material particulado que se sedimenta a partir de um fluido estacionário.

Para partículas esféricas, a velocidade de sedimentação no regime de Stokes é expressa por :

$$v_t = \rho_p . \frac{x^2 g}{18\mu f}$$

- ρ_p - densidade da partícula
- μf - viscosidade do fluido
- x - diâmetro da partícula

A taxa na qual uma superfície horizontal é coberta por sedimentação de particulados pode ser expressa por :

$$\frac{\pi \rho p g}{72\mu} m_4' = \int_0^\infty f(x) . \frac{\pi x^2}{4} . \frac{\rho p . x^2 . g}{18\mu f} . d(x) \; . \; N_\infty \qquad \left[\frac{cm^2/s}{cm^2}\right]$$

QUINTO MOMENTO : $m_5' = \int_0^\infty x^5.f(x).dx \; . \; \int_0^\infty f(x)dx$

É proporcional ao fluxo de massa que sedimenta de um fluido $[g/cm^2.s]$

$$\frac{\pi.\rho_p^2}{108.\mu f}\; m'_5 = \int_0^\infty f(x)\,.\frac{\rho_p.x^2.g}{18\mu f}\,.\,\frac{\rho\pi x^3}{6}\,dx\,.\,|N_\infty|$$

SEXTO MOMENTO : $m'_6 = \int_0^\infty x^6 f(x).dx \;.\; \int_0^\infty f(x)dx$

É proporcional ao fenômeno de difração de luz, causado por partículas de tamanho acentuadamente inferior ao comprimento de onda da luz incidente, (Rayleigh Scattering).

O espalhamento total de luz causado por um aerossol onde $(d_p <<< \lambda)$ é :

$$b_{SCAT} = \frac{2}{3}\,\frac{\pi^5}{\lambda^4}\,.\left(\frac{m^2-1}{m^2+2}\right)^2.\; I.\int_0^\infty f(x).x^6.\,dx \quad \underline{\underline{\alpha}} \quad m'_6$$

Onde:

m - Índice de Refração da Partícula

I - Intensidade de Luz Incidente

λ - comprimento de onda

α - proporcional a.

DEMAIS DISTRIBUIÇÕES : ATRIBUTOS DE DIÂMETRO

Em qualquer caso é utilizada a propriedade da distribuição de momentos da distribuição Log-Normal :

$$\Lambda_r(x|\mu;\sigma^2) = \frac{1}{m'_r}.\int_0^\infty x^r\, d\Lambda\,(x|\mu;\sigma^2) = \Lambda\,[x|(\mu + r\sigma^2);\sigma^2]$$

Acarretando :

$$\ln MG_r = \ln MG + r\ln^2\sigma_g$$

$$\ln(MG^p)_r = p\ln MG + r.p\ \ln^2\sigma_g$$

$$\ln MA_r = \ln\frac{m'_{r+1}}{m'_r} = \ln MG + (r + \frac{1}{2})\ln^2\sigma_g$$

$$\ln\,(MA^p)_r = \frac{m'_{r+p}}{m'_r} = p\ln MG + \frac{1}{2}\,p\,(p+2r)\ln^2\sigma_g$$

Assim, por exemplo :

. <u>Distribuição em superfície</u>

- Diâmetro médio em volume : $\underset{SV}{MA}$; $\left| \begin{array}{l} r = 2 \\ p = 1 \end{array} \right.$

$$\ln \frac{m_3'}{m_2'} = \ln MA_{SV} = 1 . \ln MG + \frac{1}{2} (1) \left[(1 + 2(2)) \right] \ln^2 \sigma_g$$

$$\ln \underset{SV}{MA} = \ln MG + 2{,}5 \ln^2 \sigma_g$$

- Média Geométrica em volume : $\underset{SV}{MG}$

$$\ln \underset{SV}{MG} = 1 \ln MG + 2(1) \ln^2 \sigma_g$$

$$\ln \underset{SV}{MG} = 1 \ln MG + 2 \ln^2 \sigma_g$$

$$\therefore \quad \ln \underset{SV}{MA} = \ln \underset{SV}{MG} + \frac{1}{2} \ln^2 \sigma_g$$

. <u>Distribuição em massa ou volume</u>

- Diâmetro médio aritmético em massa : MA' ; $\left| \begin{array}{l} r = 3 \\ p = 1 \end{array} \right.$

$$\ln \frac{m_4'}{m_3'} = \ln MA' = 1 \ln MG + \frac{1}{2} (1) \left[(1 + 2(3) \right] \ln^2 \sigma$$

$$\ln \frac{m_4'}{m_3'} = \ln MA' = \ln MG + 3{,}5 \ln^2 \sigma_g .$$

- Média Geométrica em massa : MG'

$$\ln MG' = \ln MG + 3 \ln^2 \sigma_g$$

$$\therefore \ln MA' = \ln MG' + \frac{1}{2} \ln^2 \sigma_g$$

EQUIVALÊNCIA ENTRE OS PARÂMETROS DAS DISTRIBUIÇÕES EM NÚMERO E EM MASSA

PARÂMETRO DE ATRIBUTO	VALOR EQUIVALENTE NA DISTRIBUIÇÃO EM NÚMERO	VALOR EQUIVALENTE NA DISTRIBUIÇÃO EM MASSA
MG	$\ln MG$ $\log MG$	$\ln MG' - 3 \ln^2\sigma_g$ $\log MG' - 6{,}9078 \log^2\sigma_g$
	$\ln MG$ $\log MG$	$\ln MA' - 3{,}5 \ln^2\sigma_g$ $\log MA' - 8{,}0590 \log^2\sigma_g$
	$\ln MG = \ln MA - \frac{1}{2} \ln^2\sigma_g$ $\log MG = \log MA - 1{,}1513 \log^2\sigma_g$	— —
MA	$\ln MA$ $\log MA$	$\ln MG' - 2{,}5 \ln^2\sigma_g$ $\log MG' - 5{,}7565 \log^2\sigma_g$
	$\ln MA$ $\log MA$	$\ln MA' - 3 \ln^2\sigma_g$ $\log MA' - 6{,}9078 \log^2\sigma_g$
	$\ln MA = \ln MG + \frac{1}{2} \ln^2\sigma_g$ $\log MA = \log MG + 1{,}1513 \log^2\sigma_g$	— —
MG'	$\ln MG + 3 \ln^2\sigma_g$ $\log MG + 6{,}9078 \log^2\sigma_g$	$\ln MG'$ $\log MG'$
	$\ln MA + 2{,}5 \ln^2\sigma_g$ $\log MA + 5{,}7565 \log^2\sigma_g$	$\ln MG'$ $\log MG'$
	— —	$\ln MG' = \ln MA' - \frac{1}{2} \ln^2\sigma_g$ $\log MG = \log MA' - 1{,}1513 \log^2\sigma_g$
MA'	$\ln MG + 3{,}5 \ln^2\sigma_g$ $\log MG + 8{,}0590 \log^2\sigma_g$	$\ln MA'$ $\log MA'$
	$\ln MA + 3 \ln^2\sigma_g$ $\log MA + 6{,}9078 \log^2\sigma_g$	$\ln MA'$ $\log MA'$
	— —	$\ln MA' = \ln MG' + \frac{1}{2} \ln^2\sigma_g$ $\log MA' = \log MG' + 1{,}1513 \log^2\sigma_g$

B I B L I O G R A F I A

1. Statistical Models in Engineering
Gerald J. Hahn & Samuel S. Shapiro
Jonh Wiley & sons, Inc. (1968)

2. The Lognormal Distribution
J. Aitchison and J.A.C. Brown
University Press - Cambridge (1957)

3. Statistical Description of the Size Properties of Non Uniform Particulate Substances
T. Hatch and S.P. Choate
J. Franklin Institute 207, 369-387, (1929)

4. Determination of "Average Particle Size" from the Screen Analysis of Non-Uniform Particulate Substances.
T. Hatch
J. Franklin Institute 215, 27-37, (1933).

5. An Introduction to Air Chemistry
S.S. Butcher/Robert J. Charlson
Academic Press - (1972)

6. Particle Size Analysis in Industrial Hygiene
Leslie Silvermann, Charles E. Billings and Melvin W. First
Academic Press - (1971)

7. Smoke, Dust and Haze
S.K. Friedlander
John Wiley & sons, Inc. (1977)

8. Particle Size Measurement
Terence Allen
Chapman and Hall - London - 2nd ed. - (1974)

9. A Mathematical Model for Relating Air Quality Measurements to Air Quality Standards.
Ralph. I. Larsen
Environmental Protection Agency AP - 89 (1971)

10. Air Pollution Vol. I - Air Pollutants Their Transformation
and Transport.
A.C. Stern
Academic Press - (1976)

11. Probabilidade : Aplicações à Estatística
Paul L. Meyer
Ao Livro Técnico S.A - 1970

12. Distributions in Statistics. Vol. II, Tome 1
Norman L. Johnson & Samuel Kotz
Jonh Wiley & sons, 1970.

O TTDI 01/GTAR/STA/DENG que integra o presente trabalho foi originado por :

Engº Ernesto Ronchini Lima
Gerente de Tecnologia do Ar

APÊNDICE : EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exemplo : A análise por microscopia ótica de um "slide", Convenientemente preparado com uma amostra adequadamente retirada de uma partida de poeira previamente submetida a uma classificação por peneiramento, apresentou a seguinte contagem:

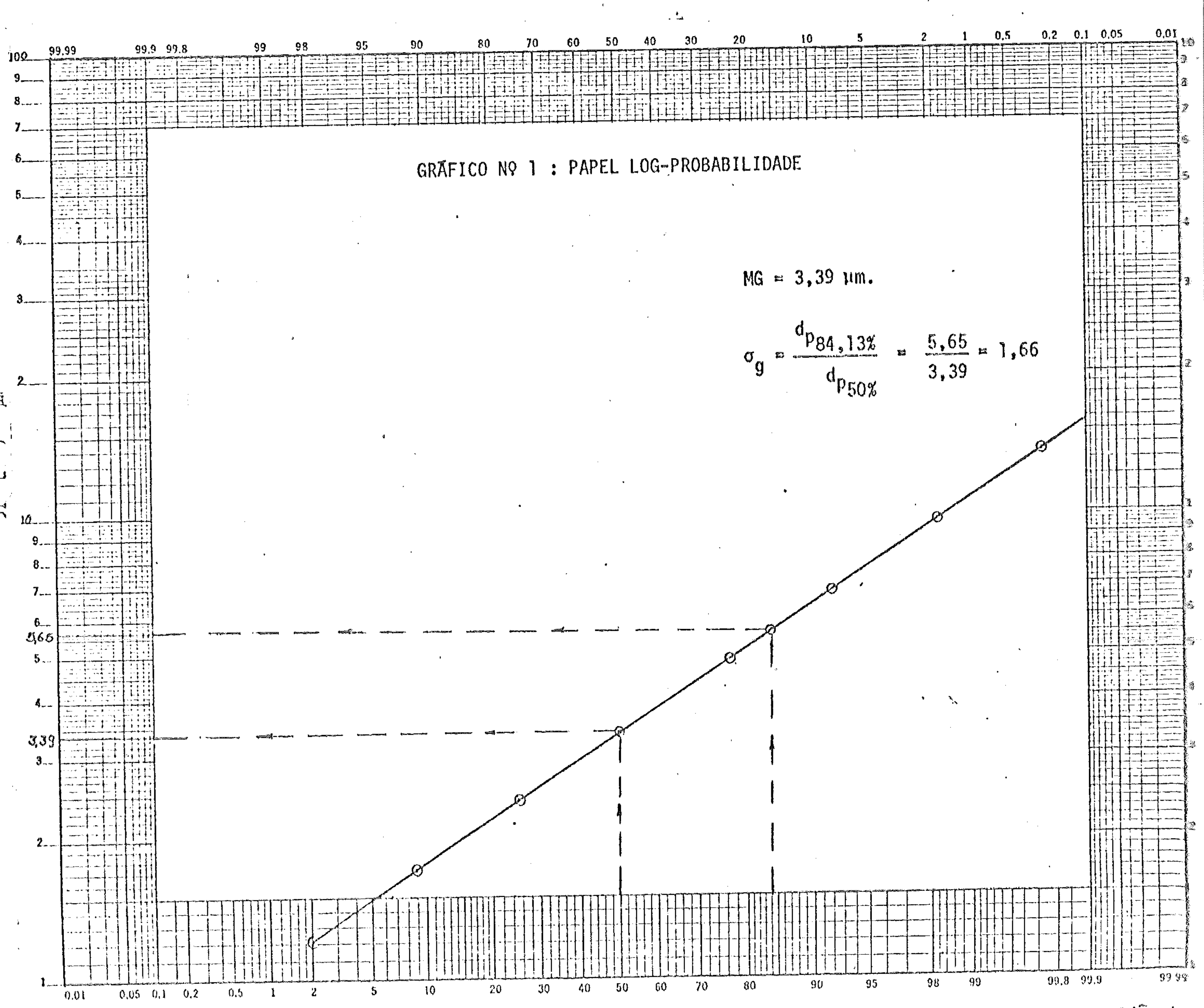
Círculo Porton nº	Diâmetro (μm)	Número de Partículas
1	1,20	8
2	1,70	28
3	2,40	68
4	3,39	96
5	4,80	108
6	6,79	60
7	9,60	25
8	13,58	6
9	19,20	1

Verifique se a contagem acima enseja a qualificação dos resultados obtidos como uma distribuição log-normal e demonstre estatisticamente tal fato utilizando também recursos de representação gráfica para comprovação.

Determine, no caso de factibilidade do ítem anterior, os parâmetros que caracterizam a distribuição em massa

Solução :

Círculo de Porton	Diâmetro (μm)	Número de Partículas	Percentagem	Percentagem Acumulada
1	1,20	8	2,00	2,00
2	1,70	28	7,00	9,00
3	2,40	68	17,00	26,00
4	3,39	96	24,00	50,00
5	4,80	108	27,00	77,00
6	6,79	60	15,00	92,00
7	9,60	25	6,25	98,25
8	13,58	6	1,50	99,75
9	19,20	1	0,25	100,00
		Σ 400	Σ 100	



Percentagem Acumulada do Número de Partículas Menor que Diâmetro

O teste mais simples e rápido para a verificação da log-normalidade de um conjunto de pontos é o utilizado no gráfico nº 1. A linha reta obtida demonstra sem qualquer dúvida que os pontos ajustam-se perfeitamente a uma distribuição log-normal. A Média Geométrica (Mediana) e o respectivo Desvio Padrão Geométrico ficam determinados conforme o procedimento assinalado no próprio gráfico.

Vale ressaltar que este é um exemplo didático e muitas vezes é necessário, devido a falta de alinhamento dos pontos amostrais, proceder-se a um teste de aderência de log-normalidade antes tentar-se o ajuste da melhor reta, o que de per-si já é problemático devido à escala logaritmica da ordenada que impede o traçado visual meramente intuitivo.

Para verificação da aderência à log-normalidade de amostras à populações e para o ajuste de pontos amostrais podemos referenciar os trabalhos:

- The Goodness of fit and the distribution of particle sizes
  Part I and Part II
  F. Kottler
  Journal of Franklin Institute 251, (1951)

- Teste de aderência (Kolmogorov/Smirnov - Lilliefors)
  PDI - 03/79 - DAID/GEE-AR/STAR/DTSA.

Caso não se dispusesse do papel Logaritmo-Normal Probabilidade o problema seria resolvido de forma analítica pela distribuição que é normal $N(\mu ; s^2)$, para a obtenção da Média Geométrica e do Desvio Padrão Geométrico da distribuição Log Normal $\Lambda(\mu , s^2)$.

Tal procedimento é o a seguir apresentado.

Intervalo de Classe (μm)	(x_i) PT.Central (μm)	(y_i) LN(PT.Central) (μm)	(f_i) Frequência	$(y_i \cdot f_i)$	$(y_i)^2$	$(y_i)^2 \cdot f_i$	Percentagem de Frequência	Percentagem Acumulada menor que limite superior da classe
0,85 ⟝ 1,20	1,025	0,0247	8	0,1976	0,0006	0,0048	2	2,00
1,20 ⟝ 1,70	1,450	0,3716	28	10,4048	0,1381	3,8668	7	9,00
1,70 ⟝ 2,40	2,050	0,7178	68	48,8104	0,5152	35,0336	17	26,00
2,40 ⟝ 3,39	2,895	1,0630	96	102,0480	1,1300	108,4800	24	50,00
3,39 ⟝ 4,80	4,095	1,4098	108	152,2584	1,9875	214,6500	27	77,00
4,80 ⟝ 6,79	5,795	1,7570	60	105,4200	3,0870	185,2200	15	92,00
6,79 ⟝ 9,60	8,195	2,1035	25	52,5875	4,4247	110,6175	6,25	98,25
9,60 ⟝ 13,58	11,590	2,4501	6	14,7006	6,0030	36,0180	1,5	99,75
13,58 ⟝ 19,20	16,390	2,7967	1	2,7967	7,8215	7,8215	0,25	100,00
		Σ	400	489,2240		701,7122	100	-

Na distribuição dos Logaritmos (que é normal) :

$$\mu = \bar{y} = \frac{\Sigma\, y_i \cdot f_i}{\Sigma\, f_i} = \frac{489,224}{400} = 1,2231\ \mu m$$

$$s^2 = \frac{n\, \Sigma\, (y_i)^2 \cdot f_i - [\Sigma\, (y_i \cdot f_i)]^2}{n\,(n-1)} = \frac{400(701,7122) - (489,224)^2}{400\ (399)} = 0,2591\ \mu m^2$$

$$s = 0,5090\ \mu m$$

Com (μ) e (s) determinados pode-se verificar :

$$MG = e^{\mu} = e^{1,2231} = 3,3977\ \mu m$$

$$\sigma_g = \frac{e^{\mu + s}}{e^{\mu}} = e^{s} = e^{0,5090} = 1,6636$$

$$MA = e^{\mu + \frac{1}{2} s^2} = e^{1,2231 + \frac{1}{2} \cdot (0,5090)^2} = 3,8677\ \mu m$$

$$MODA = e^{\mu - 1 s^2} = e^{(1,2231 - 0,2591)} = 2,6222\ \mu m$$

$$\beta^2 = e^{2\mu + s^2}(e^{s^2} - 1) = e^{[2.(1,2231) + (0,5090)^2]}.(e^{(0,5090)^2} - 1) = 4,4243 \mu m$$

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA :

Na ausência do papel logaritmo-probabilidade a distribuição poderá ser representada por histogramas adequados.

No histograma do gráfico 2 (papel mono-log) verifica-se o aspecto normal esperado devido ao tipo de coordenada usada a qual traduz a relação numérica que as distribuições log-normal e normal guardam entre si. Tal fato é bem visualizado pela posição da média aritmética que é a principal medida de tendência central na distribuição normal.

No histograma do gráfico 3 (papel milimetrado), foi mantida a amplitude geométrica original, de magnitude $\sqrt{2}$, entre os limites dos intervalos de classe. Verifica-se que nestas condições o valor da moda está compreendido em um intervalo de classe que não representa a sua posição esperada como valor de maior frequência de ocorrência.

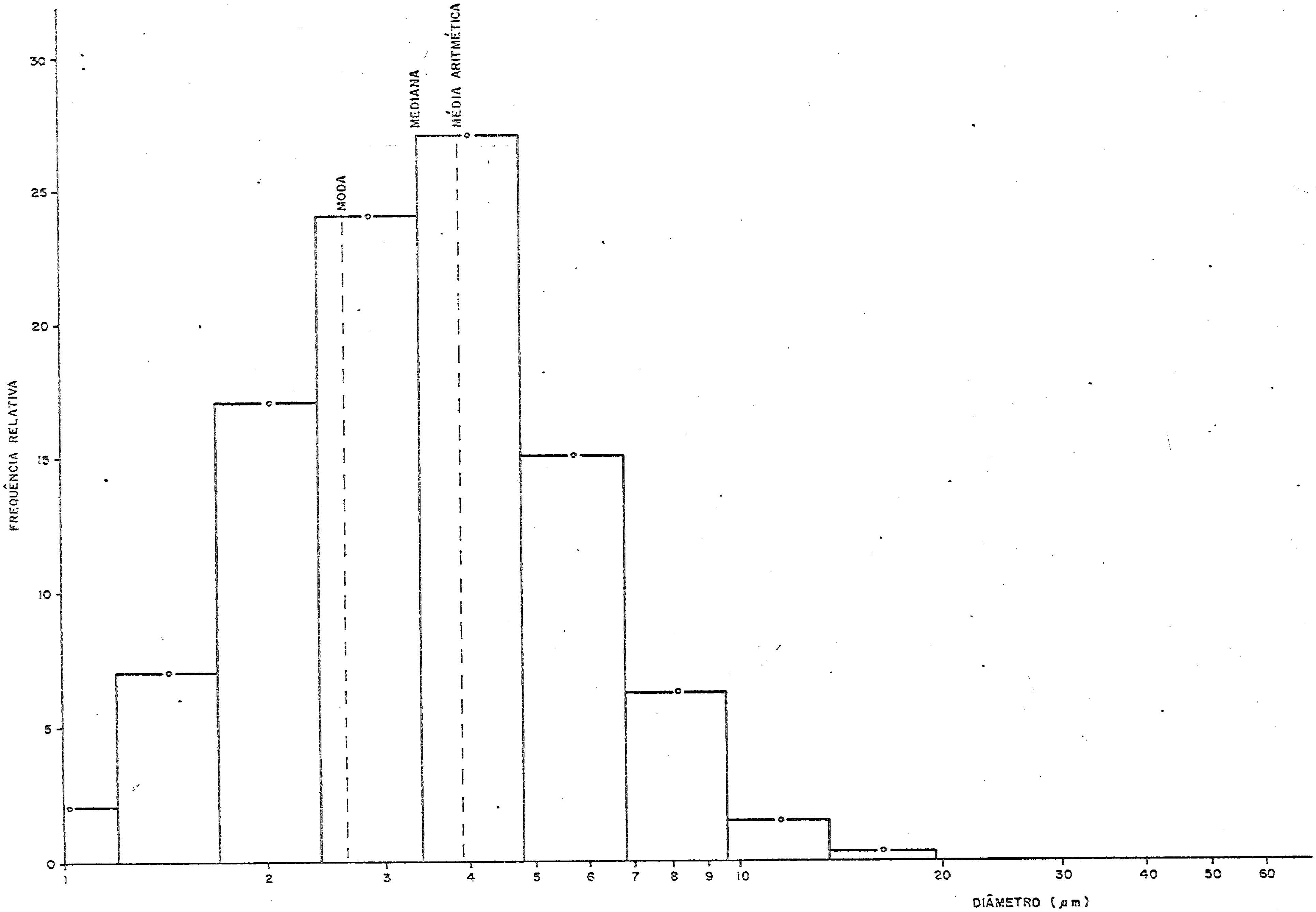


Gráfico 2 - Histograma : Representação mono-log .

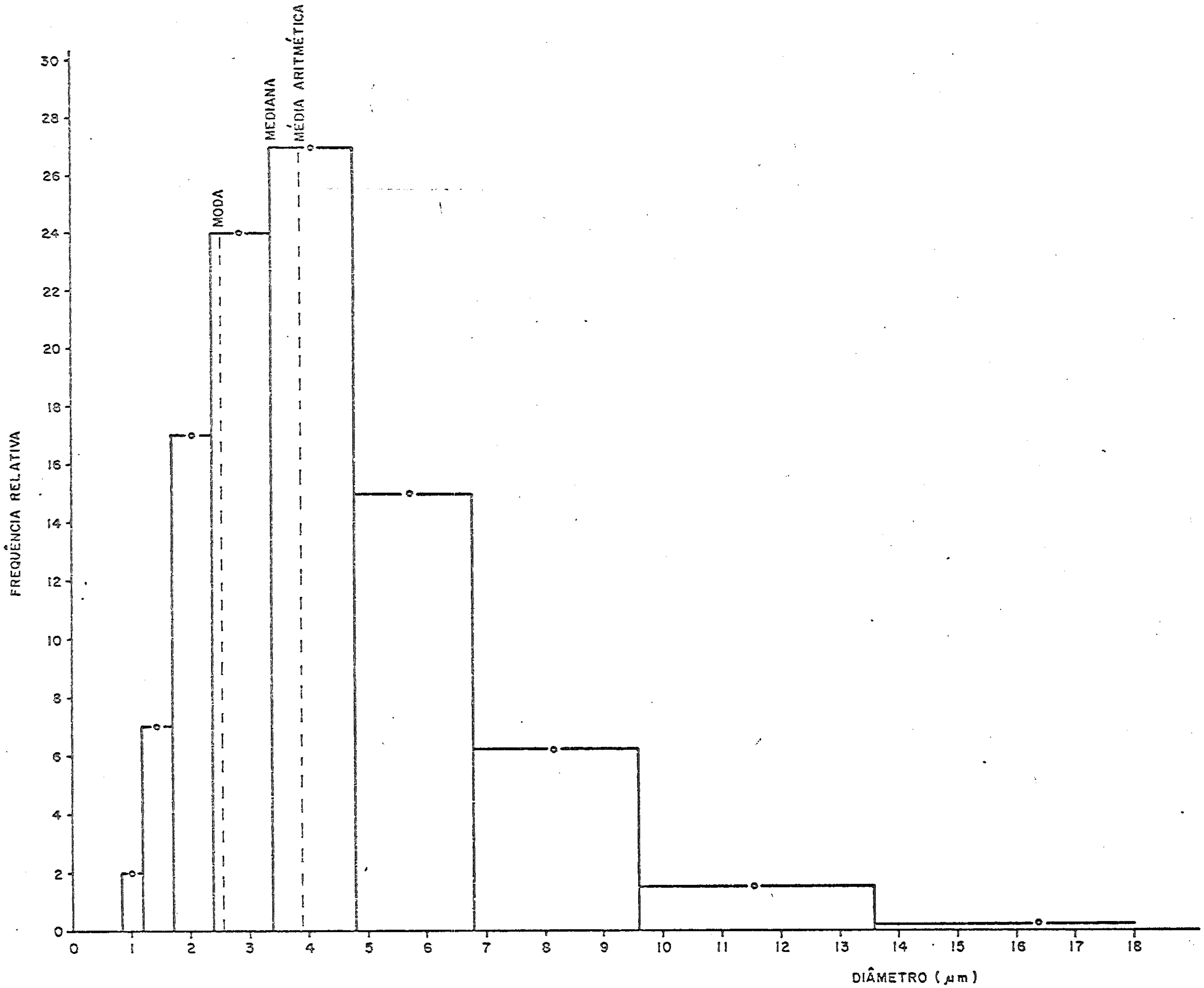


Gráfico 3 - Histograma com intervalo de classe geométrico .

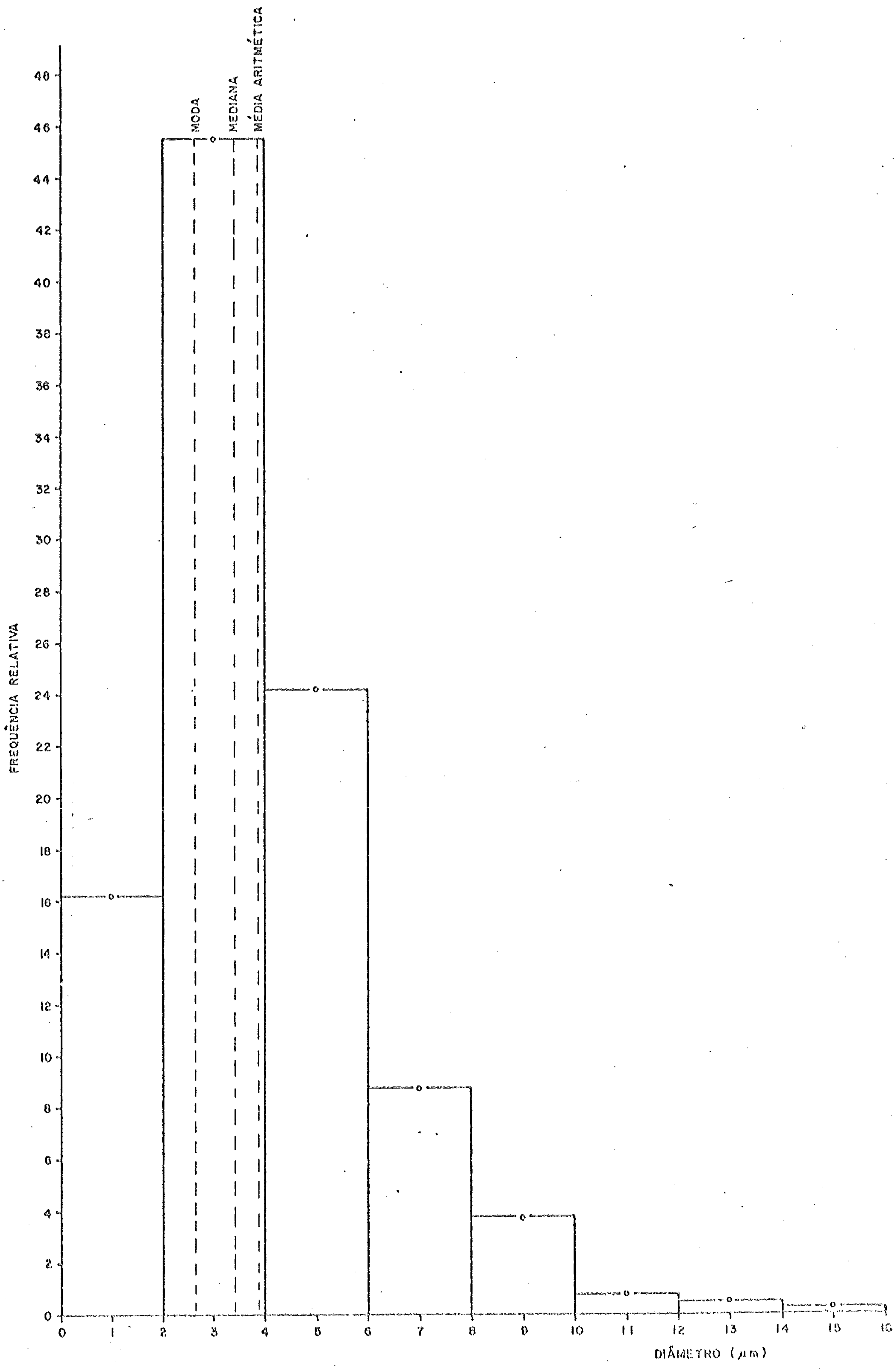


Gráfico 4 - Histograma com intervalo de classe aritmético .

O histograma do gráfico 4 (papel milimetrado) foi construído substituindo-se a relação geométrica entre os limites de cada classe por uma amplitude aritmética de magnitude de 2 μm. Para efetivar tal fato foi utilizada a pressuposição de que as frequências absolutas para cada diâmetro estão uniformemente distribuidas na amplitude em cada intervalo de classe original.

Exemplificando para a obtenção do intervalo de classe 0 ⊣ 2 μm :

Intervalo	nº Partículas
0,85 ⊣ 1,20	8
1,20 ⊣ 1,70	28
1,70 ⊣ 2,4	68
0 ⊣ 2	?

É intuitivo que o intervalo de classe (0 ⊣ 2μm) possuirá 8 + 28 + W partículas, sendo (W) obtido da hipótese de homogeneidade de distribuição para o intervalo 1,70 ⊣ 2,40, de amplitude 0,7 μm, isto é;

0,7 μm — 68 partículas

0,3 μm — W

$\therefore$ W = 29,14 $\simeq$ 29 partículas

$\therefore$ 0 ⊣ 2 μm $\Longrightarrow$ 8 + 28 + 29 = 65 partículas

restando 39 partículas no intervalo 2 ⊣ 2,40 μm

Procedendo-se sucessivamente da mesma forma,

Intervalo (μm)	f_i	%	(% A <)
0 ⊣ 2	8+28+29 = 65	16,25	16,25
2 ⊣ 4	39+96+47 = 182	45,50	61,75
4 ⊣ 6	61+36 = 97	24,25	86,00
6 ⊣ 8	24+11 = 35	8,75	94,75
8 ⊣ 10	14+1 = 15	3,75	98,50
10 ⊣ 12	0+3 = 3	0,75	99,25
11 ⊣ 14	0+2 = 2	0,50	99,75
14 ⊣ 16	0+1 = 1	0,25	100,00
	Σ = 400	Σ = 100	

Nesta amplitude de intervalo de classe a moda já aparece posicionada na classe de maior frequência. Se fosse adotado um intervalo de classe ainda inferior o aumento da assimetria e o isolamento da moda seria ainda mais nítido.

Caracterização da Distribuição em Massa :

Mediana :

$$\ln MG' = \ln MG + 3 \ln^2 \sigma_g$$

$$\ln MG' = \ln 1{,}2231 + 3 \ln^2 1{,}6636 = 0{,}9786 \ \mu m$$

$$MG' = 2{,}6608 \ \mu m$$

Tal valor poderia ser obtido diretamente pelo gráfico 5 (ABACO) como se segue :

$$\sigma_g = 1{,}66 \Longrightarrow \frac{MG'}{MG} = 2{,}175 \ \mu m$$

Para $MG = 1{,}2231 \ \mu m$

$$MG' = (2{,}175).(1{,}2231) = 2{,}6608 \ \mu m$$

Média Aritmética :

$$\ln MA' = \ln MG' + \frac{1}{2} \ln^2 \sigma_g$$

$$\ln MA' = \ln 2{,}6608 + \frac{1}{2} \ln^2 1{,}6636 = 1{,}108$$

$$MA' = 3{,}028 \ \mu m$$

ou

$$\ln MA' = \ln MG + 3{,}5 \ln^2 \sigma_g$$

$$\ln MA' = \ln 1{,}2231 + 3{,}5 \ln^2 1{,}6636 = 1{,}108$$

$$MA' = 3{,}028 \ \mu m$$

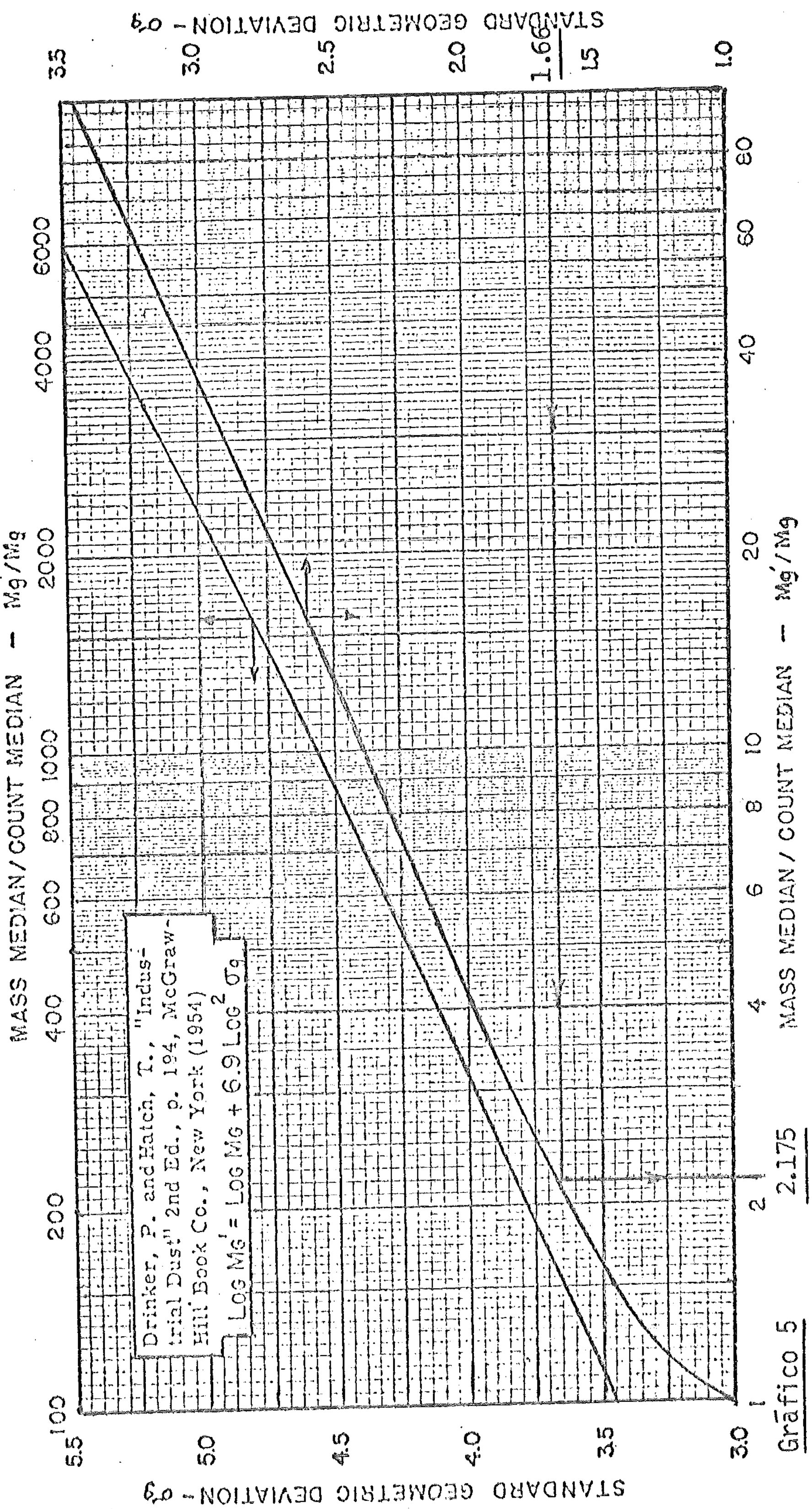


Gráfico 5

GRAPHICAL ESTIMATION OF MASS MEDIAN DIAMETER (M_g') FROM COUNT MEDIAN DIAMETER (M_g) AND STANDARD GEOMETRIC DEVIATION (σ_g)

Exemplo : Procedeu-se a uma avaliação de poeira em suspensão em um ambiente de trabalho industrial por meio de um amostrador pessoal provido de um filtro membrana. A análise por microscopia ótica de um setor circular do referido filtro apresentou o resultado que se segue:

d_p (µm)	Número de Partículas
0,6	92
0,85	70
1,20	78
1,70	69
2,40	49
3,40	26
4,81	7
6,80	8
9,62	1

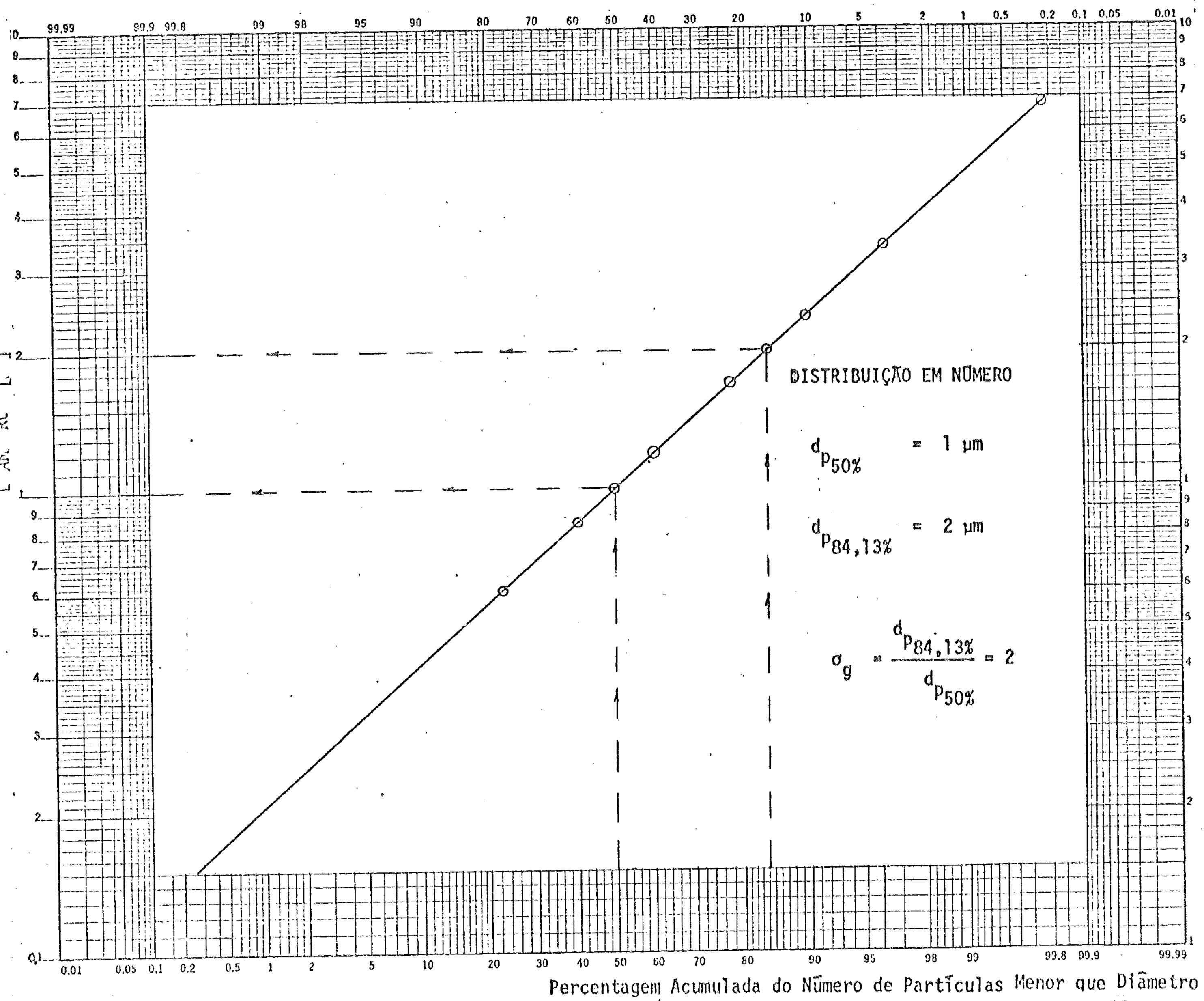
Verifique se o resultado acima é consistente com uma distribuição Log-Normal e em caso positivo determine os demais diâmetros médios dos atributos descritos no texto.

Solução :

d_p (µm)	Número de Partículas	Percentagem (%)	Percentagem Acumulada
0,60	92	23,00	23,00
0,85	70	17,50	40,50
1,20	78	19,50	60,00
1,70	69	17,25	77,25
2,40	49	12,25	89,50
3,40	26	6,50	96,00
4,81	7	1,75	97,75
6,80	8	2,00	99,75
9,62	1	0,25	100,00
	Σ 400	Σ 100	

Por força de se ter utilizado para contagem das partículas um graticulo de Porton o valor da percentagem acumulada é considerado igual ou menor que o diâmetro associado.

Plotando d_p(μm) versus (% AC <) em um papel Logaritmo-Normal probabilidade verifica-se que a distribuição ē quase uma perfeita reta, isto ē, a distribuição ē Log-Normal Unimodal (existe apenas uma reta passando por todos os pontos).



Assumindo partículas esféricas de densidade constante:

- Verificação Da Mediana E Desvio Padrão Geométrico:

$$\left| \begin{array}{l} d_{p_{50\%}} = 1\ \mu m = MG \\ d_{p_{84,13\%}} = 2\ \mu m \end{array} \right. \Longrightarrow \sigma_g = \frac{d_{p_{84,13\%}}}{d_{p_{50\%}}} = 2$$

Na distribuição normal $N(y|\mu, \sigma^2)$; $y = \log_e d_p$

$$\mu = \ln MG = \ln 1 = 0 \ \mu m$$
$$\sigma = \ln \sigma_g = \ln 2 = 0{,}6931 \ \mu m$$

- Verificação da Moda e da Média Aritmética :

. MODA $= e^{\mu - \sigma^2} = e^{0 - (0{,}6931)^2} = 0{,}6185 \mu m$

. MÉDIA ARITMÉTICA :

$$MA = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} = e^{0{,}5\,(0{,}6931)^2} = 1{,}272 \ \mu m$$

- Diâmetro Médio em Volume :

$$\ln MA_V = \ln MG + 1{,}5 \ln^2\sigma_g$$
$$\ln MA_V = \ln 1 + 1{,}5 \ln^2 2 = 1{,}5\,(0{,}4805) = 0{,}721$$
$$MA_V = e^{0{,}721} = 2{,}056 \ \mu m$$

Representa no caso a Massa Média das Partículas.

- Distribuição em Superfície Específica :

d_{SV} - Diâmetro de uma esfera que guarda a mesma razão volume/área superficial externa que a partícula.

Média Geométrica (Mediana)

$$\ln MG_r = \ln MG + r \ln^2\sigma_g$$

para $r = 2$:

$$\ln MG_{SV} = \ln MG + 2 \ln^2\sigma_g$$
$$\ln MG_{SV} = \ln 1 + 2 \ln^2 2 = 2(0{,}4805) = 0{,}9609$$
$$MG_{SV} = 2{,}614 \ \mu m$$

Média Aritmética :

$$\ln MA_r = \ln \frac{m'r + 1}{m'r} = \ln MG + \left(r + \frac{1}{2}\right) \ln^2\sigma_g$$

no caso : $r = 2$

$$\ln MA_{SV} = \ln \frac{m'_3}{m'_2} = \ln MG + 2{,}5 \ln^2\sigma_g$$

$$\ln MA_{SV} = 2{,}5 \ln^2 2 = 1{,}2011$$

$$MA_{SV} = 3{,}324 \ \mu m$$

- Distribuição em Massa :

Média Geométrica (Mediana)

$$\ln MG_r = \ln MG + r\ln^2\sigma_g$$

$$\ln MG' = \ln MG + 3 \ln^2\sigma_g$$

$$\ln MG' = \ln 1 + 3 \ln^2 2 = 3(0{,}4805) = 1{,}4415$$

$$MG' = 4{,}227 \ \mu m$$

Média Aritmética

$$\ln MA_r = \ln \frac{m'_r + 1}{m'_r} = \ln MG + (r + \tfrac{1}{2}) \ln^2\sigma_g$$

para $r = 3$

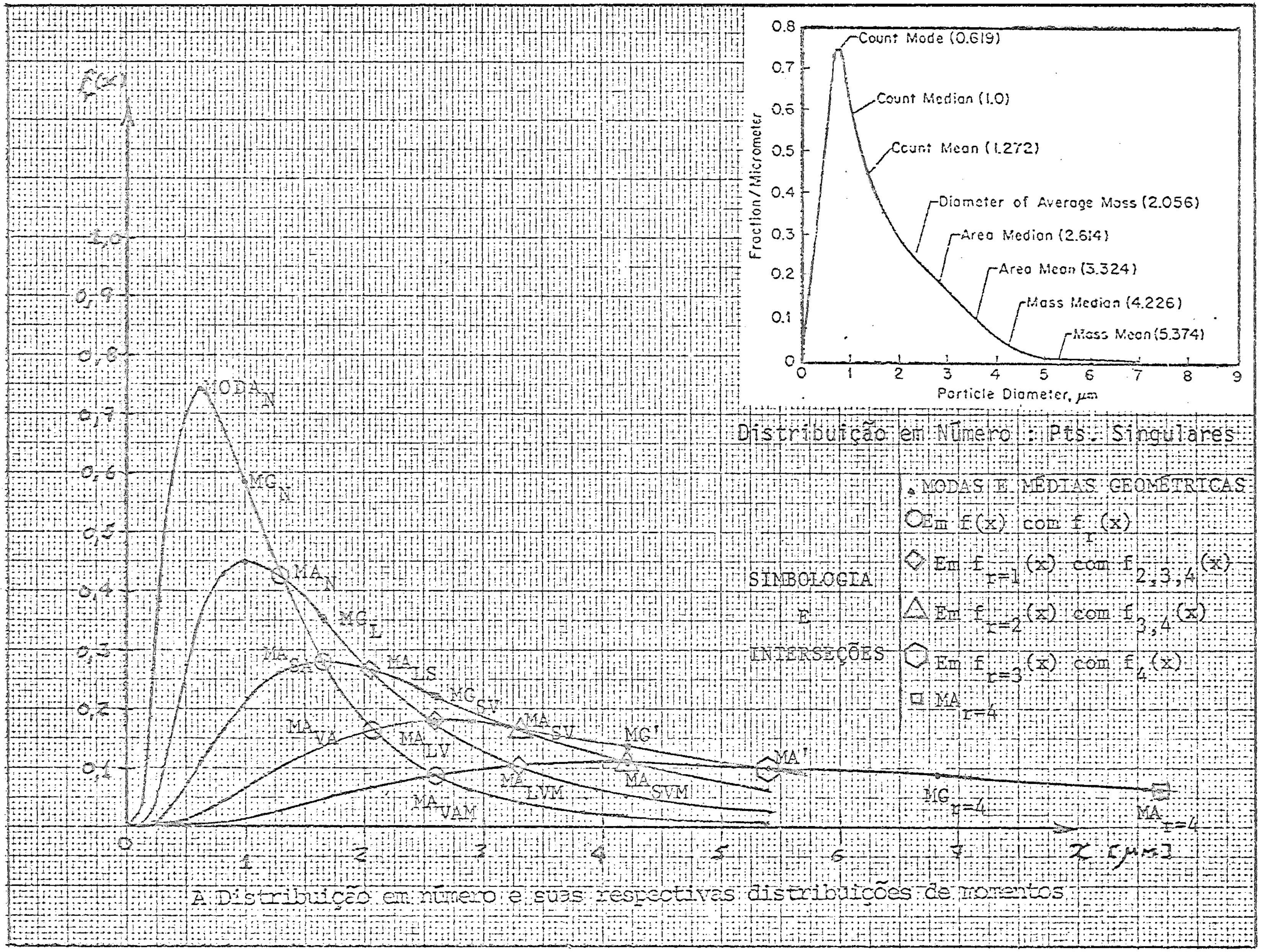
$$\ln MA' = \frac{m'_4}{m'_3} = \ln MG + (3 + \tfrac{1}{2}) \ln^2\sigma_g$$

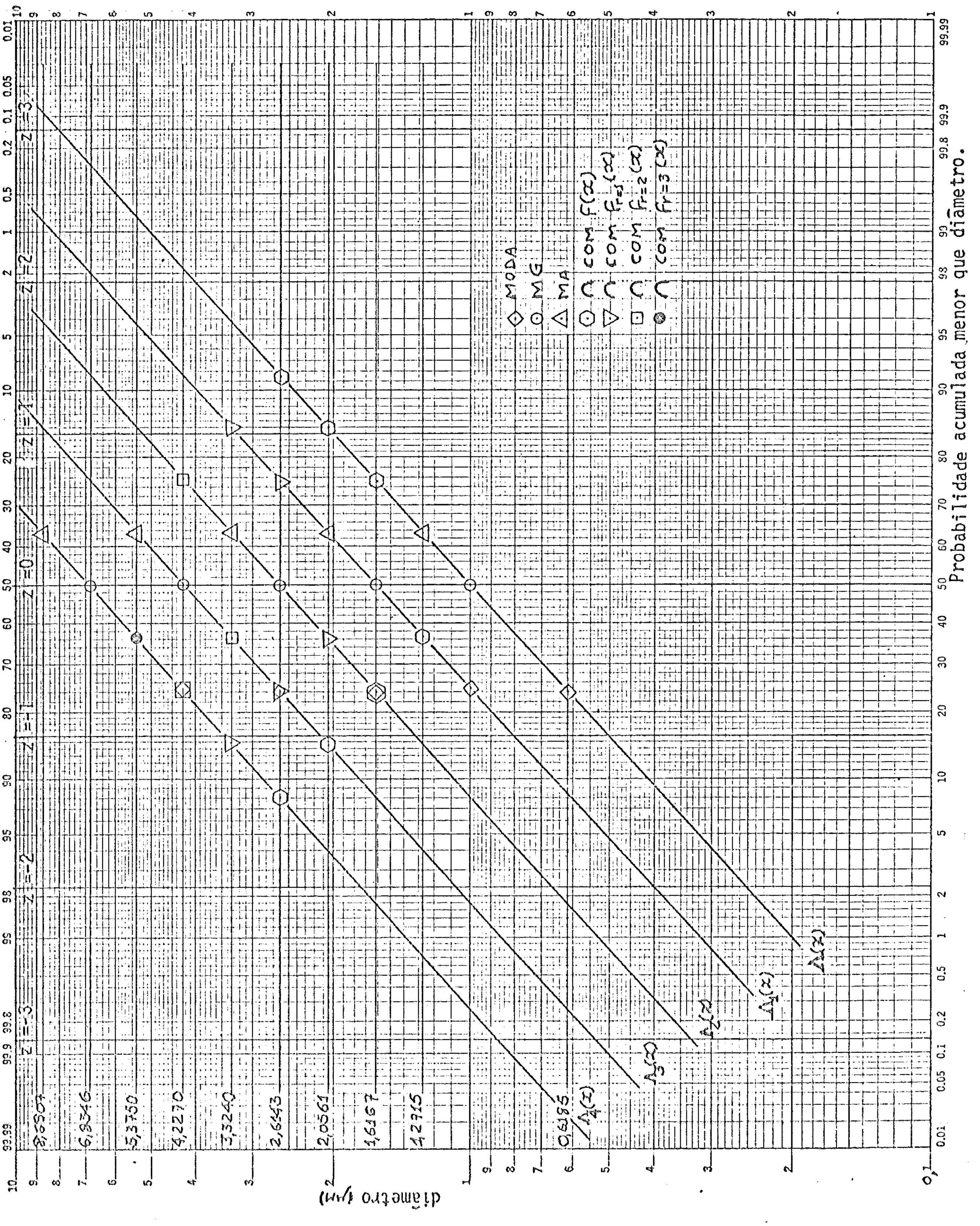
$$\ln MA' = \ln 1 + 3{,}5 \ln^2 2 = 3{,}5(0{,}4805) = 1{,}6818$$

$$MA' = 5{,}375 \ \mu m$$

Os resultados obtidos aparecem a seguir graficamente representados como pontos singulares da distribuição em número e como pontos pertencentes às distribuições de momento que caracterizam cada atributo de diâmetro calculado.

Nota: Conforme teorema anteriormente apresentado uma distribuição Log-Normal tem a propriedade de possuir distribuições log-normais para seus momentos. Entretanto se o resultado de uma mensuração direta de um certo atributo de Diâmetro se apresentar log-normalmente distribuída, se constituindo em um momento de ordem r em relação à distribuição em número, tal fato absolutamente não garante que as distribuições de ordem (r - i) sejam log-normais . Por exemplo, se a distribuição de diâmetro em massa for Log-Normal nada se pode inferir sobre o tipo de distribuição dos diâmetros em número.


Count Mode (0.619)
Count Median (1.0)
Count Mean (1.272)
Diameter of Average Mass (2.056)
Area Median (2.614)
Area Mean (3.324)
Mass Median (4.226)
Mass Mean (5.374)
Fraction/Micrometer
Particle Diameter, μm
Distribuição em Número : Pts. Singulares
SIMBOLOGIA E INTERSEÇÕES
• MODAS E MÉDIAS GEOMÉTRICAS
Em f(x) com $f_r(x)$
Em $f_{r=1}(x)$ com $f_{2,3,4}(x)$
Em $f_{r=2}(x)$ com $f_{3,4}(x)$
Em $f_{r=3}(x)$ com $f_4(x)$
$MA_{r=4}$
$f(x)$
$MODA_N$
MG_N
MA_N
MG_L
MA_{SA}
MA_{LS}
MG_{SV}
MA_{VA}
MA_{LV}
MA_{SV}
MG'
MA'
MA_{LVM}
MA_{SVM}
MA_{VAM}
$MG_{r=4}$
$MA_{r=4}$
x [μm]
A Distribuição em número e suas respectivas distribuições de momentos


MODA
MG
MA
∩ com f(x)
∩ com f_{r=1}(x)
∩ com f_{r=2}(x)
∩ com f_{r=3}(x)
z = 3
z = 2
z = 1
z = 0
z = -1
z = -2
z = -3
8,5507
6,8346
5,3750
4,2270
3,3240
2,6443
2,0561
1,6167
1,2715
0,6185
Probabilidade acumulada menor que diâmetro.
diâmetro (µm)

Exemplo : sendo $y = \ln x$, e :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma.x} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2\right] \quad ; \quad x \geqslant 0$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\,\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y - \mu)^2\right] \quad ; \quad -\infty < y < \infty$$

As funções densidade de probabilidade das distribuições Log-Normal e Normal respectivamente.

Tendo sido verificado o comportamento Log-Normal dos diâmetros de particulados em número de uma amostra e determinado que tal distribuição apresenta - os seguintes parâmetros : μ= o µm e σ^2 = 0,4805 µm^2 . Fixados os seguintes valores da variável independente :

Ponto nº	x(µm)
1	0,1000
2	0,3000
3	0,5000
4	0,6185
5	1,0000
6	1,2715
7	1,6167
8	2,0561
9	2,6143
10	3,3240
11	4,2270
12	5,3750

Determine numérica e graficamente pelo uso direto e exclusivo do teorema fundamental da distribuição de momentos, os cinco corolários do mesmo apresentados no texto.

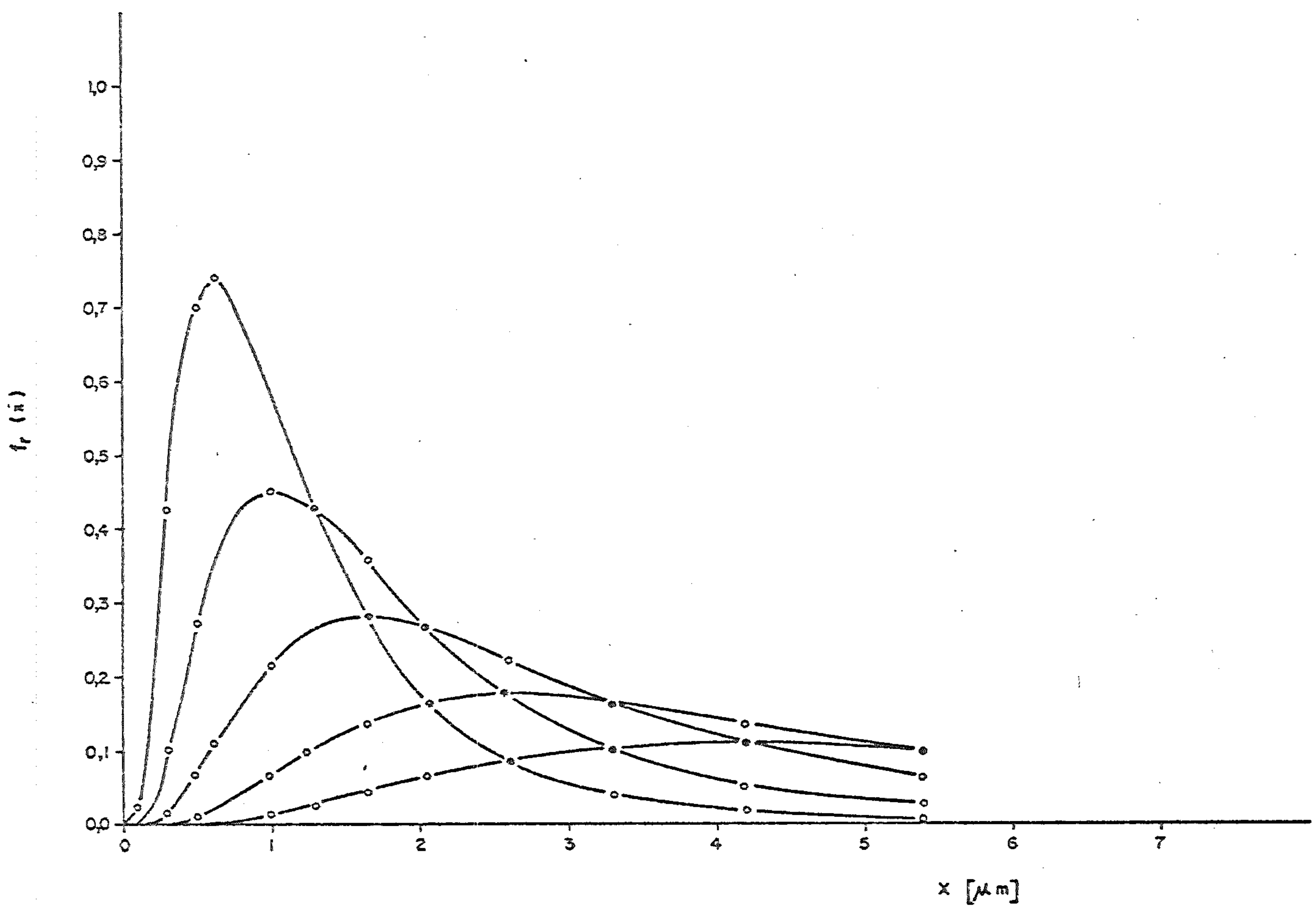
Solução : Utilizando uma calculadora programável podemos para cada valor dado determinar $f_r(x)$ e $f_r(y)$, levando em conta que $\Lambda_r[x|(\mu + \sigma^2); \sigma^2]$. Tal procedimento resulta nas tabelas e gráficos que se seguem, de persi auto explicativos, permitindo a verificação direta dos corolários citados no texto.

Distribuição Log-Normal: Curvas de Densidade de Probabilidade

x	f(x)	f(x) r=1	f(x) r=2	f(x) r=3	f(x) r=4
0,1000	0,0231	0,0018	< 10^{-4}	< 2,6 x 10^{-6}	4,95 x 10^{-8}
0,3000	0,4245	0,1001	0,0146	0,0013	0,00007
0,5000	0,6982	0,2745	0,0668	0,0100	0,0009
0,6185	0,7318	0,3560	0,1071	0,0199	0,0023
1,0000	0,5755	0,4526	0,2202	0,0662	0,0123
1,2715	0,4263*	0,4262*	0,2636	0,1008	0,0239
1,6167	0,2800*	0,3560	0,2800*	0,1361	0,0409
2,0561	0,1630*	0,2636**	0,2636**	0,1630*	0,0624
2,6143	0,0842*	0,1731**	0,2201	0,1731**	0,0842*
3,3240	0,0386	0,1009**	0,1630***	0,1630***	0,1008**
4,2270	0,0157	0,0521	0,1071***	0,1362	0,1071***
5,3750	0,0056	0,0239	0,0624	0,1008****	0,1008****

onde : * - interseção c/ f(x) *** - interseção c/ f_2 (x)
** - interseção c/ f_1(x) **** - interseção c/ f_3 (x)

Pts. Singulares	f(x)	f(x) r=1	f(x) r=2	f(x) r=3	f(x) r=4
MODA	0,6185	1,000	1,6167	2,6143	4,2270
$[f_r(x)]$	(0,7318)	(0,4526)	(0,2800)	(0,1731)	(0,1071)
MEDIANA	1,000	1,6169	2,6141	4,2270	6,8346
$[f_r(x)]$	(0,5755)	(0,3559)	(0,2202)	(0,1362)	(0,0842)
MÉDIA ARITMÉTICA	1,2715	2,0560	3,3239	5,375	8,6907
$[f_r(x)]$	(0,4263)	(0,2636)	(0,1064)	(0,1008)	(0,0624)
μ_r	0	0,4805	0,9609	1,4415	1,9220
σ^2	0,4805	0,4805	0,4805	0,4805	0,4805

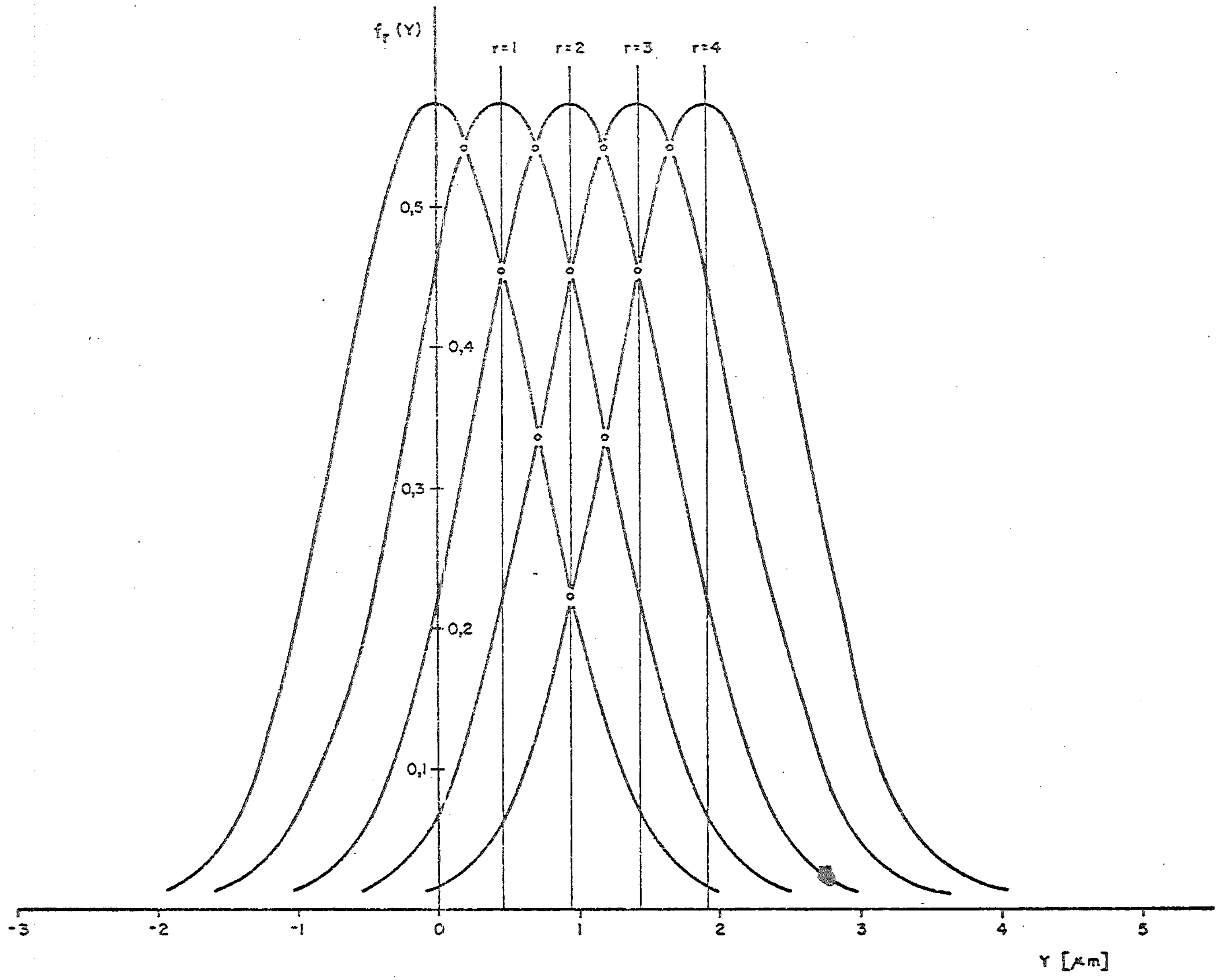


A distribuição em número e suas respectivas distribuições de momentos .

Distribuições Normais Associadas : Curvas de Densidade de Probabilidade

x	y	$f(y)$ $\mu = 0$ $\sigma = 0,69315$	$f_{r=1}(y)$ $\mu = 0,4805$ $\sigma = 0,69315$	$f_{r=2}(y)$ $\mu = 0,9609$ $\sigma = 0,69315$	$f_{r=3}(y)$ $\mu = 1,4415$ $\sigma = 0,69315$	$f_{r=4}(y)$ $\mu = 1,9220$ $\sigma = 0,69315$
0,1000	-2,3026	0,0023	0,00018	$8,84 \times 10^{-6}$	$2,65 \times 10^{-7}$	$4,94 \times 10^{-9}$
0,3000	-1,2040	0,1273	0,0300	0,0044	0,0004	$2,2 \times 10^{-5}$
0,4805	-0,7329	0,3291	0,1243	0,0291	0,0042	0,00038
0,5000	-0,6931	0,3491	0,1373	0,0334	0,0050	0,00047
0,6185	-0,4805	0,4526	0,2201	0,0662	0,0123	0,0014
0,6931	-0,3665	0,5005	0,2728	0,0920	0,0192	0,0464
1,0000	0,0000	0,5756	0,4526	0,2202	0,0662	0,0123
1,2715	0,2402	0,5420*	0,5420*	0,3352	0,1282	0,0309
1,4415	0,3657	0,5008	0,5677	0,3981	0,1726	0,0463
1,6168	0,4805	0,4526*	0,5756	0,4527 *	0,2201	0,0622
1,9220	0,6534	0,3691	0,5579	0,5216	0,3016	0,1078
2,0000	0,6931	0,3491	0,5491	0,5342	0,3213	0,1195
2,0561	0,7208	0,3352*	0,5420**	0,5420 **	0,3352 *	0,1282
2,6143	0,9609	0,2202*	0,4527**	0,5756	0,4526 **	0,2201 *
3,3239	1,2011	0,1283	0,3353**	0,5420 ***	0,5420 ***	0,3351 **
4,2270	1,4415	0,0662	0,2201	0,4526 ***	0,5756	0,4526 ***
5,3750	1,6818	0,0303	0,1282	0,3351	0,5420 ****	0,5420 ****
6,8346	1,9220	0,0123	0,0662	0,2201	0,4526	0,5756
11,0482	2,4023	0,0014	0,0123	0,0662	0,2202	0,4527
17,8636	2,8828	0,0001	0,0014	0,0123	0,0663	0,2202

As anotações de asterisco conforme anteriores.



Representação da distribuição log-normal em número e das distribuições de seus momentos através das curvas normais associadas .

CETESB
Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental
Av. Prof. Frederico Hermann Jr., 345 - Pinheiros
Fone: 210.1100 - Telex (011) 222-46 - CTS - BR
CEP 05459 — São Paulo - SP — Brasil